

# 유체-구조 연계 해석을 위한 보간 기법 연구

이재훈<sup>1</sup>, 권장혁<sup>2</sup>

## A STUDY ON THE INTERPOLATION METHODS FOR THE FLUID-STRUCTURE INTERACTION ANALYSIS

J. Lee<sup>1</sup> and J.H. Kwon<sup>2</sup>

*The fluid-structure interaction analysis such as a static aeroelastic analysis requires the result of each analysis as an input to the other analysis. Usually the grids for the fluid analysis and the structural analysis are different, so the results should be transformed properly for each other. The Infinite Plate Spline(IPS) and the Thin Plate Spline(TPS) are used in interpolating the displacement and the pressure. In this study, such interpolation methods are compared with kriging which provides a precise response surface. The static aeroelastic analysis is performed for the supersonic flow field with shock waves and the pressure field is interpolated by the TPS and kriging. The TPS shows tendency to weaken the shock strength, whereas kriging preserves the shock strength.*

**Key Words :** 공탄성 해석(Aeroelastic Analysis), 표면 보간법(Surface Spline), 크리징(Kriging)

### 1. 서 론

유체-구조 연계 해석이란 유체 해석과 구조 해석이 서로 연계된 해석을 말한다. 대표적인 예로는 공탄성 해석을 들 수 있다. 일반적으로 유체 해석의 격자와 구조 해석의 격자는 서로 다르다. 따라서 각 해석의 결과는 다른 해석의 격자에 맞도록 적절한 변환이 필요하다. 이와 같은 변환은 유체 해석과 구조 해석의 연계 방법에 따라 다르다. 유동장 해석과 구조 해석을 연계하는 방법으로는 모드 접근법(modal approach)과 직접법(direct approach)을 들 수 있다. 모드 접근법에서 모드(mode)란 구조물의 실제 변위가 아닌 구조물의 대표적인 변형 형상을 나타낸다. 모드 접근법은 모드 형상의 중첩을 통해 변위를 구하는 방법을 말하는데 운동 방정식(dynamic equation)을 풀어 모드 형상들에 대한 가중치를 계산하고 이들을 모드 형상에 적용해 그 합으로 구조물의 변형을 계산한다. 이를 위해서는 구조 해석으로 구한 모드 형상을 유동 해석

격자에 한 번만 보간해 주면 된다. 그리고 구조 해석은 이미 구한 모드 형상의 중첩으로 구하기 때문에 유한 요소 기법 등을 이용해 매번 구조 해석을 할 필요는 없다. 반면 직접법은 모드의 중첩 없이 실제 구조물의 변위를 직접 구하게 된다. 따라서 구조 해석과 유동장 해석의 결과들을 다른 격자에 맞도록 매번 보간해 주어야 한다. 본 연구에서는 위 두 가지 접근에 필요한 보간을 모두 다루고자 한다.

기존에 많이 사용되던 보간 기법으로는 무한 균일 평판의 치점 방정식에 기반을 둔 표면보간(surface spline) 기법을 들 수 있다. 대표적으로 기법으로는 IPS(Infinite Plate Spline)와 TPS(Thin Plate Spline)가 있다[1,2]. 이러한 기법은 광범위하게 사용되고 있으며 특히 상용 소프트웨어인 MSC/Nastran의 공탄성 해석에도 쓰이고 있다.

kriging은 함수 근사(function approximation)의 일종으로 지질통계학(geostatistics) 분야에서 처음 고안된 것을 Sacks 등에 의해 수치 실험에 맞도록 변형되어 사용되어 왔다[3,4]. 실험 설계가 유래하게 된 농업이나 생물학에서의 물리적 실험은 랜덤 오차 때문에 반응 표면법(response surface method)과 같은 간단한 다항식으로 근사화가 가능하다. 그러나 컴퓨터를 이용한 실험은 동일한 입력에 대해 항상 같은 출력값을 준다. 따라서 Sacks 등은 kriging을 도입하여 컴퓨터 프로그램의 출

접수일: 2007년 11월 22일, 심사완료일: 2008년 2월 26일.

1 학생회원, 한국과학기술원 항공우주공학전공

2 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학전공

\* Corresponding author, E-mail: jhkwn@kaist.ac.kr

력값을 근사화하는 이론적 근거를 제시하였다. 지질통계학에서의 kriging은 variogram을 사용해 국부적인 변동을 표시했으나 Sacks 등은 이를 공분산 함수(covariance function)로 대체하여 국부적인 변동을 표시하였다. 최근에 kriging은 오랜 시간이 걸리는 계산을 대체하는 데 주로 쓰이며 이를 이용해 최적화를 수행하기도 한다. Simpson은 노즐의 다분야 통합 최적설계를 위해 노즐에 대한 유체-구조 연계 해석을 kriging으로 대체하였으며 2차 다항식만을 사용한 RSM(response surface method) 보다 더 정확한 함수 근사가 가능하였다[5].

본 연구에서는 기존의 표면보간 기법과 kriging을 서로 다른 격자를 사용하는 유체-구조 연계 해석의 보간에 적용하여 이들의 유용성을 알아보려고 한다. 이를 위해 구조 해석을 통해 구한 모드 형상과 유동장 해석을 통해 구한 압력장을 각각 유동장 해석 격자와 구조 해석 격자에 맞도록 변환한다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 표면 보간법(Infinite Plate Spline, IPS)

표면보간법은 두께가 얇은 무한한 길이의 평판에 수직변위가 주어질 때 임의의 점에서의 변위를 계산해 준다[1]. 이는 무한평판 이론을 근거로 이루어진다. 무한 평판에 점 하중들이 가해질 때 평판의 변위  $w$ 는 중첩을 통해 식 (1)과 같이 유도된다.

$$w(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \sum_{i=1}^N [K_i(x, y)P_i] \quad (1)$$

식 (1)에는  $N+3$  개의 미지수가 있고 이것들은 주어진 변위  $w_i$ 와 식 (2)에 의해 구해질 수 있다.

$$\begin{cases} \sum P_i = 0, \\ \sum x_i P_i = 0, \\ \sum y_i P_i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

식 (2)를 행렬 형태로 표시하면 식 (3)과 같다.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{K} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} 0 & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} & 1 & x_1 & y_1 \\ K_{21} & 0 & K_{23} & \dots & K_{2n} & 1 & x_2 & y_2 \\ K_{13} & K_{13} & 0 & \dots & K_{1n} & 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{13} & K_{13} & K_{13} & \dots & 0 & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

식 (1), (3)에서  $K_i(x, y)$ ,  $K_{ij}$ 는 식 (4), (5)와 같이 정의된다.

$$K_i(x, y) = \frac{\phi(r_i)}{16\pi D} = \frac{r_i^2 \ln r_i^2}{16\pi D} \quad (4)$$

$$K_{ij} = K_i(x_j, y_j) \quad (5)$$

식 (4)에서  $r_i$ 는 점들 간의 거리를 의미하고 IPS에서는 다음과 같다.

$$r_i = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \quad (6)$$

그런데 행렬 계산의 크기가 커지면 수치적 불안정성이 발생하므로 이를 줄여주기 위해 regularization을 적용한다. 즉,  $K$ 행렬을  $K + \lambda I$ 로 대체한다[6].

### 2.2 Thin Plate Spline, TPS

TPS는 IPS에 3차원 효과를 추가한 것으로 식 (6)의  $r_i$ 는 다음과 같이 변형된다.

$$r_i = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \quad (7)$$

모든 구조 절점들이 같은 평면 내에 있을 경우엔 TPS를 사용할 수 없으며 이때에는 IPS를 사용해야 한다.

### 2.3 kriging

kriging에는 인자들의 상관관계를 모사할 수 있는 다양한 상관함수가 존재한다. 본 연구에서는 선형 상관 함수(linear correlation function)를 사용하였으며 거리 인자(distance parameter)인  $\theta$ 를 구하기 위해 구배법의 일종인 BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) 기법을 사용하였다.

kriging의 예측자(predictor)는 식 (8)과 같다.

$$\hat{y}(x) = f(x)^T \beta^* + r(x)^T \gamma^* \quad (8)$$

식 (6)에서  $f(x)^T \beta^*$ 는 함수공간의 전체적인 형상을 나타내고  $r(x)^T \gamma^*$ 는 국부적인 형상을 나타낸다.  $\gamma^*$ 는 식 (9)로 계산된다.

$$R\gamma^* = Y - F\beta^* \tag{9}$$

식 (9)에서  $Y$ 는 표본 반응(sample response)으로 표본의 종속 변수를 말하고,  $F$ 는 설계 행렬(design matrix)로 표본의 독립 변수를 말하고  $R$ 은 상관 행렬(correlation matrix)을 의미한다.  $\beta^*$ 는 최소 자승법(least square method)으로 구할 수 있지만 독립변수의 개수가 많거나 불량조건(ill-conditioned)일 경우 계산이 부정확해질 수 있다[7,8]. 따라서  $\beta^*$ 는 식 (10)과 같은 과잉계(overdetermined system)에 대한 최소 자승해(least square solution)를 구한다.

$$\tilde{F}\beta \approx \tilde{Y} \tag{10}$$

우선  $F, Y$ 에 대해 식 (11)과 같은 선형 방정식을 풀어  $\tilde{F}, \tilde{Y}$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} \tilde{C}\tilde{F} &= F, \\ \tilde{C}\tilde{Y} &= Y \end{aligned} \tag{11}$$

식 (11)에서  $\tilde{C}$ 는 하삼각행렬(lower triangular matrix)을 의미한다. 이와 같이 구한  $\tilde{F}$ 에 대해 QR 인수분해(factorization)를 수행하면 식 (12)와 같이 된다.

$$\tilde{F} = QG^T \tag{12}$$

위 결과를 이용해 식 (13)으로부터  $\beta^*$ 를 구할 수 있다.

$$G^T \beta^* = Q^T \tilde{Y} \tag{13}$$

### 3. 수치 해석 및 결과

#### 3.1 유동장 해석

유동장 해석을 위해 3차원 Navier-Stokes 방정식을 사용하였다. 식 (14)는 압축성 Navier-Stokes 방정식을 직교좌표계에 미분형태로 표시한 것이다.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f_{vi}}{\partial x_i} \tag{14}$$

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{pmatrix}, f_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + \delta_{i1} p \\ \rho u_i u_2 + \delta_{i2} p \\ \rho u_i u_3 + \delta_{i3} p \\ \rho u_i H \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$f_{vi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{ij} \delta_{i1} \\ \sigma_{ij} \delta_{i2} \\ \sigma_{ij} \delta_{i3} \\ u_j \sigma_{ij} + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

$\rho, u_i, p, E, H, T$ 는 각각 밀도,  $x_i$ 축 방향의 속도성분, 압력, 총에너지, 총엔탈피 및 온도를 나타낸다. 공간 이산화 기법은 유한 체적법이 사용되었고, 시간 전진은 내재적 기법의 일종인 DADI가 사용되었다. 식 (15)의 수치 유속을 계산하기 위해서는 TVD(Total Variation Diminishing)의 일종인 2차 정밀도 풍상차분법(Second Order Upwind Scheme)이 사용되었다. 또한 수렴 가속을 위해 다중격자, mesh sequencing 등이 적용되었다[9,10].

#### 3.2 구조 해석

유체 구조 연계 해석을 위한 구조 해석 방법은 크게 모드 접근법과 직접법으로 나눌 수 있다. 모드 접근법을 위해서는 구조 해석으로 모드 형상을 구하게 되는데 모드 형상은 eigenvector에 해당한다. 직접법에서는 유동장 해석에서 구한 하중을 구조 해석으로 전달해 유한 요소법 등을 이용해 구조물의 하중을 직접 계산하게 된다. 플러터와 같은 동적 해석에는 모드 접근법이 주로 쓰이고 정적 해석에는 직접법이 주로 쓰인다.

#### 3.3 수치 예제

구조 해석과 유동장 해석 간의 정보 교환을 위한 보간 기법 연구를 위해 모드 형상과 압력장을 각 해석 격자로 보간하는 수치 실험을 수행하였다. 모드 형상의 보간을 위해 플러터 수치 모사에 많이 사용되는 AGARD445.6 날개의 1번째 모드와 4번째 모드 형상을 구조 해석 격자에서 유동장 해석 격자로 보간했다[11]. 압력장의 보간을 위해서는 AGARD445.6과 유동장 해석의 검증 예제로 많이 사용되는 ONERAM6의 압력 분포를 유동장 해석 격자에서 구조 해석 격자로 보간하였다[12].

##### 3.3.1 AGARD445.6, 모드 형상

모드 형상은 구조 해석을 통해 11x11의 2차원 평판에 대해

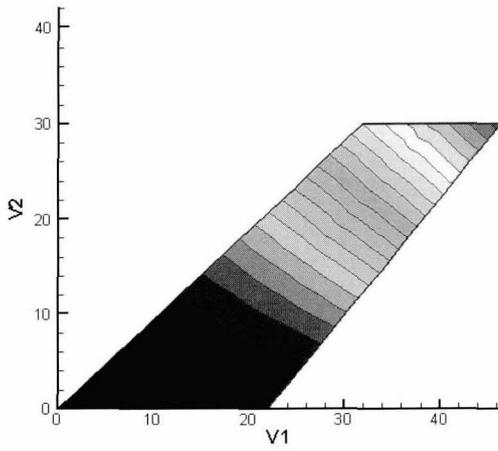


Fig. 1 FEM, mode 1.

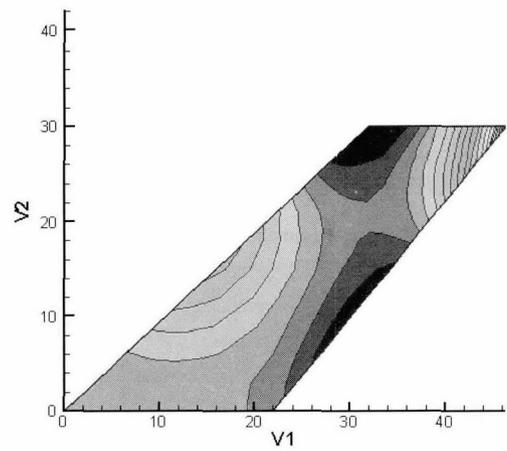


Fig. 4 FEM, mode 4.

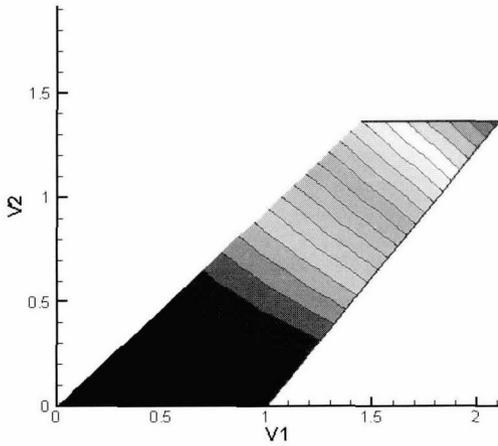


Fig. 2 IPS, mode 1.

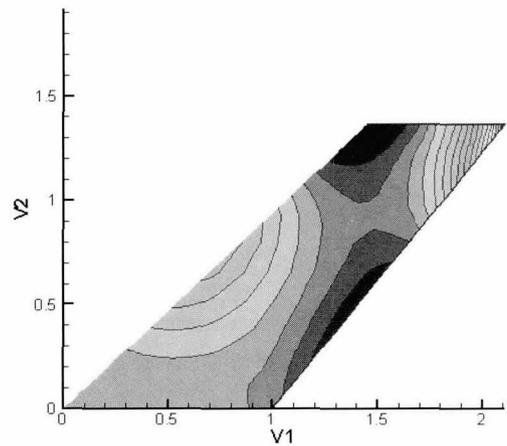


Fig. 5 IPS, mode 4.

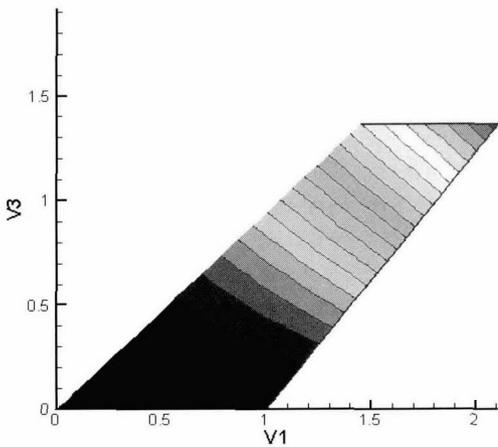


Fig. 3 kriging, mode 1.

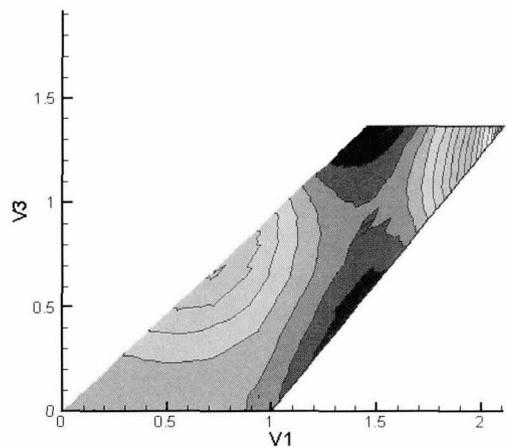


Fig. 6 kriging, mode 4.

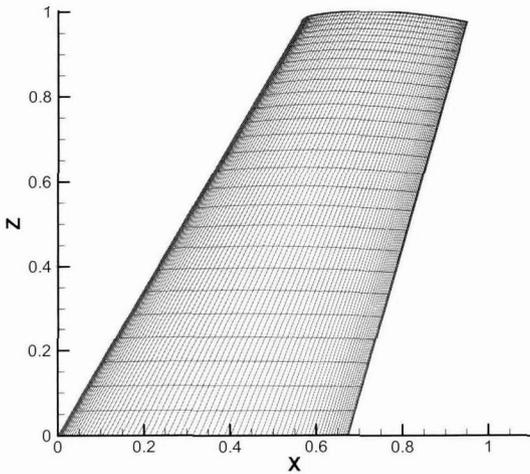


Fig. 7 ONERAM6 CFD grid.

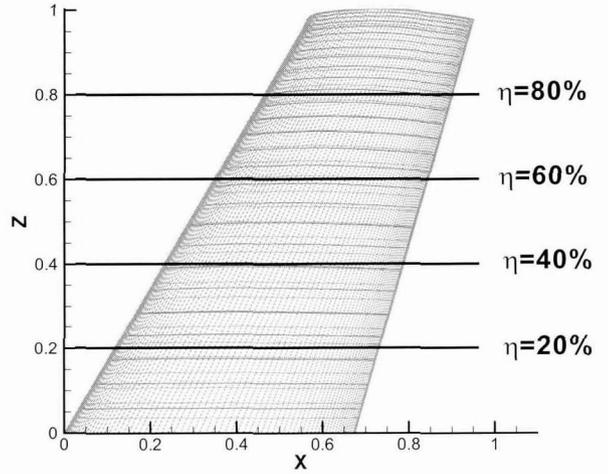


Fig. 9 ONERAM6 FEM grid.

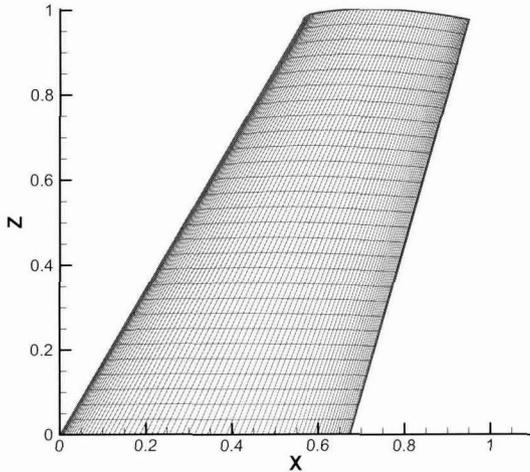


Fig. 8 ONERAM6 FEM grid.

계산됐으며 이를 129×25의 유동장 해석용 격자에 보간하였다. 구조 해석으로 구한 모드 형상이 2차원 상에서 계산됐으므로 TPS의 적용이 힘들기 때문에 IPS와 kriging의 결과를 비교하였다. 4개의 모드 형상 중에서 첫 번째 굽힘과 두 번째 비틀림에 해당하는 1번째 모드와 4번째 모드의 보간 결과를 Fig. 1-6에 나타내었다. Fig. 1-3의 첫 번째 모드의 결과를 보면 IPS와 kriging 모두 구조 해석과 일치하는 모드 형상을 보여주고 있다. Fig. 4-6의 4번째 모드에서는 IPS는 구조 해석의 모드를 잘 보간한 반면 kriging은 날개 끝단의 안점(saddle point) 부근에서 오차를 보인다. 모드 형상은 구조물의 변위에 해당하는데 기준에 많이 사용되던 IPS의 경우 이와 같이 연속적이고 부드러운 변위의 보간에서 우수한 성능을 보이고

있다. 이는 IPS가 구조물에 작용하는 변위의 보간을 위해 만들어졌기 때문에 kriging에 비해 변위의 보간에서 더 정확한 것으로 생각된다. kriging의 경우 인자들간의 상관관계를 임의로 가정한 함수로 표현하는 데 만약 이 함수가 실제의 상관관계를 표현하지 못한다면 예측의 정확도가 떨어질 수 있다.

### 3.3.2 ONERAM6, 압력장

TPS와 kriging을 '충격파가 존재하는 압력장의 보간에 적용하여 정확도를 비교한다. 날개 형상은 ONERA-M6로서 유동장 해석의 격자 크기는 193×49×33로 31만개의 격자점이 쓰였다. 유동 조건은 받음각이 3.06도, 레이놀즈수는 11.7×10<sup>6</sup>, 마하수는 0.8395 등이다. 점성의 영향을 고려하기 위해 Baldwin-Lomax 모델을 사용하였다. Fig. 7-9에는 유동장 해석용 격자와 구조 해석용 격자를 표시하였다. 두 격자의 날개 표면의 격자 크기는 145×29로 동일하지만 격자점의 좌표는 다르다. 유동장 해석용 격자의 경우 날개 끝단으로 갈수록 조밀해지는 반면 구조 해석용 격자는 날개의 끝단에 대해 균일하다. 유동장 해석의 경우 날개 끝단에서 wing tip vortex 등 복잡한 현상이 발생하므로 이를 모사하기 위해 날개 끝단에 대해 조밀하게 격자를 형성한다. 구조 해석의 경우에는 일반적으로 Fig. 8과 같이 격자를 균일하게 분포시킨다.

Fig. 10-13은 날개의 길이 방향으로 20%, 40%, 60%, 80%에서의 압력 분포를 비교한 것이다. kriging은 CFD의 압력분포를 잘 표현하고 있는 반면 TPS의 경우 앞전(leading edge)의 최대점의 높이가 CFD 보다 다소 낮음을 볼 수 있다. 일반적으로 kriging은 표본(sample)의 반응(response)을 반드시 지나게 되므로 표본 내에서의 보간에는 정확성이 우수하다. 반면 기존의 보간 기법들은 반드시 표본의 반응을 지날 수는 없으며

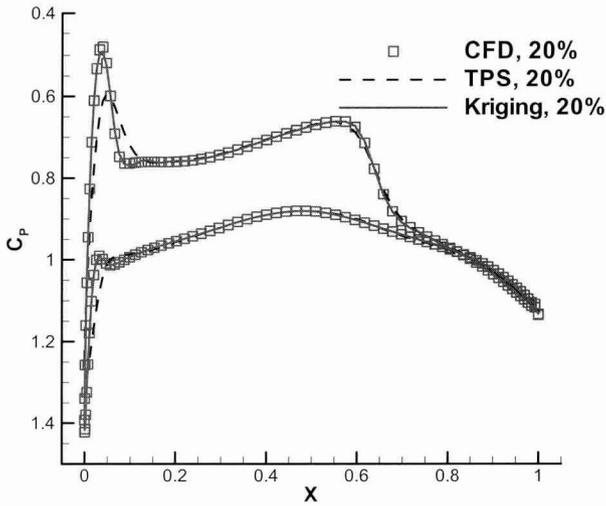


Fig. 10 ONERAM6 pressure distribution, 20%.

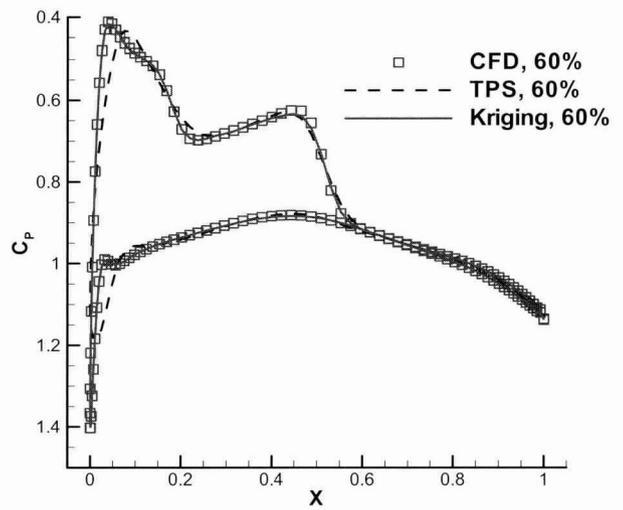


Fig. 12 ONERAM6 pressure distribution, 60%.

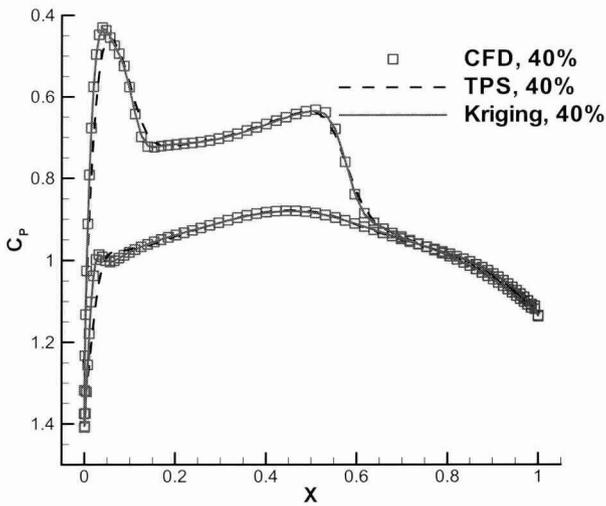


Fig. 11 ONERAM6 pressure distribution, 40%.

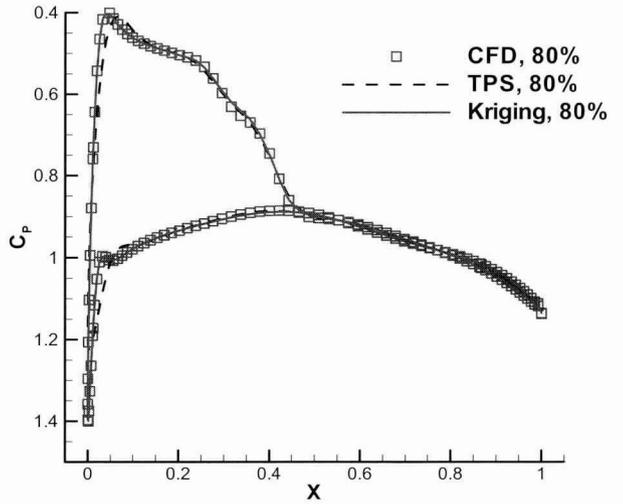


Fig. 13 ONERAM6 pressure distribution, 80%.

Fig. 10-13과 같이 최대점이 표본의 반응보다 낮은 반응면을 구성하기도 한다. 보간에 소요된 시간을 비교하면 TPS는 46 초가 걸린 반면 kriging은 126초가 소요되었다. kriging의 경우 최적화 기법을 이용해 거리 인자의 값을 구해야 하기 때문에 계산 시간이 더 많이 소요되는 것이다. 오차를 비교해 보면, 날개 길이 방향의 위치가 20%와 60%일 때 TPS의 오차가 크게 발생한다. 이는, 두 개의 격자를 동시에 그려놓고 확대한 결과 20%, 60%에서 두 격자점의 위치가 40%, 80%에 비해 더 차이가 나고 있었으며 이로 인해 TPS 결과에서 오차가 더 크게 발생한 것으로 보인다.

### 3.3.3 AGARD445.6, 압력장

Fig. 14-18은 AGARD445.6의 날개에 대한 보간 결과를 보여주고 있다. 유동 해석의 격자 크기는  $177 \times 33 \times 41$ 이며, 유동 해석에 사용된 반응각은 0도, 마하수는 1.141이며 점성의 영향은 고려하지 않았다. 유동 해석과 구조 해석의 날개 표면의 격자 크기는  $129 \times 25$ 로 동일하지만 격자점들의 좌표는 서로 다르다. Fig. 14-16의 압력의 등고선을 보면 뒷전(trailing edge) 부근에서 충격파가 생성되는 것을 볼 수 있다. TPS는 충격파 주위에서 등고선의 밀도가 CFD의 등고선보다 줄어들었지만 kriging은 충격파 주위의 등고선이 CFD와 유사하다.

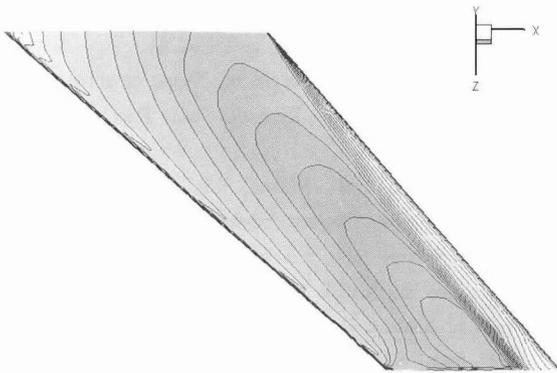


Fig. 14 Pressure contour, CFD.

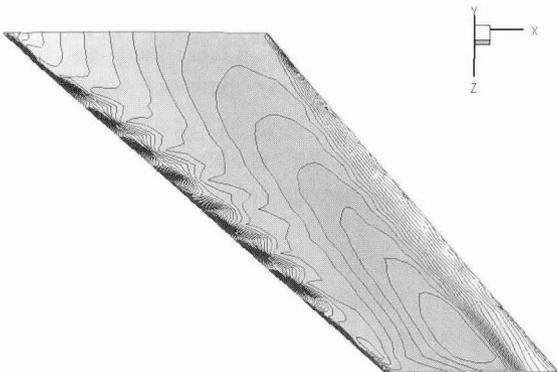


Fig. 15 Pressure contour, TPS.

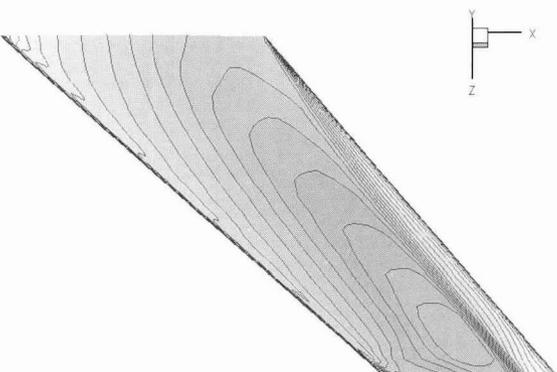


Fig. 16 Pressure contour, kriging.

앞전(leading edge) 부근에서도 TPS는 정확도가 많이 떨어지는 반면 kriging은 CFD의 압력 분포를 잘 모사하고 있다. Fig. 17-18은 길이 방향으로 20%, 60%에서의 압력 분포를 표시하고 있는데 TPS는 앞전에서 CFD와 차이를 보이지만 kriging은 CFD와 거의 일치한다.

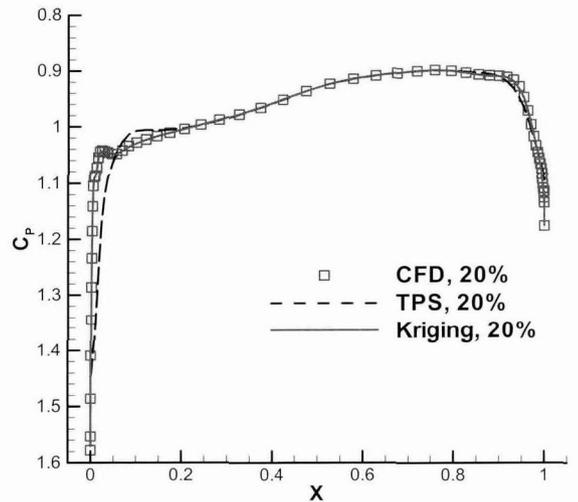


Fig. 17 AGARD445.6 pressure distribution, 20%.

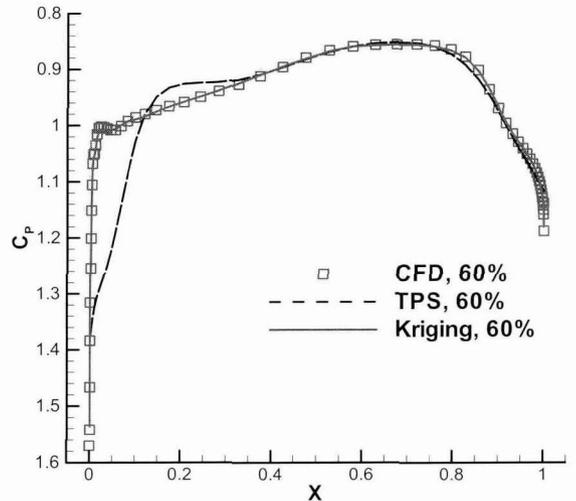


Fig. 18 AGARD445.6 pressure distribution, 60%.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 유체-구조 연계 해석에 필요한 모드 형상 및 압력장의 보간 기법의 비교 연구를 수행하였다. 기존에 많이 사용되던 IPS, TPS와 최근에 반응표면기법의 일종으로 사용되기 시작한 kriging을 비교하였다. 모드 형상의 보간에서는 IPS의 성능이 우수했다. kriging의 경우 모드의 형상이 복잡해지면 진동하는 것이 관찰되었다. 압력장의 보간에서는 kriging이 TPS에 비해 CFD의 압력장을 더 잘 모사하였다. TPS는 앞전 부근에서 정확도가 떨어지지만 충격과 부근에서는 비교적 CFD의 압력분포와 잘 일치했다. 따라서 구조 해석으로 구한

변위를 유동장 해석에 보간할 경우에 기존의 IPS, TPS를 사용하고 유동장 해석으로 구한 압력장을 구조 해석용 격자로 보간할 경우에는 kriging을 사용한다면 해석 간 정보 교환의 정확도를 높일 수 있을 것으로 보인다.

### 참고문헌

- [1] 1972, Harder, R.L. and Desmarais, R.N., "Interpolation Using Surface Splines," *AIAA Journal*, Vol.9, No.2, pp.189-191.
- [2] 2000, Smith, M.J., Hodges, D.H. and Cesnik, C.E.S. "Evaluation of Computational Algorithms Suitable for Fluid-Structure Interactions," *AIAA Journal*, Vol.37, No.2, pp.282-294.
- [3] 1989, Sacks, J., Welch, W.J., Mitchell, T.J. and Wynn, H.P., "Design and Analysis of Computer Experiments," *Statistical Science*, Vol.4, No.4, pp.409-435.
- [4] 1989, Sacks, J., Schiler, S.B. and Welch, W.J., "Designs for Computer Experiments," *Technometrics*, Vol.31, No.1, pp.41-47.
- [5] 2001, Simpson, T.W., Mauery, T.M., Korte, J.J. and Mistree, F., "Kriging Models for Global Approximations in Simulation-Based Multidisciplinary Design Optimization," *AIAA Journal*, Vol.39, No.12, pp.2233-2241.
- [6] 2003, Donato, G. and Belongie, S., "Approximation Methods for Thin Plate Spline Mappings and Principal Warps," *CS2003-0764*.
- [7] 2002, Lophaven, S.N., Nielsen, H.B. and Søndergaard, J., "A Matlab Kriging Toolbox Version 2.0," Denmark.
- [8] 2002, Lophaven, S.N., Nielsen, H.B. and Søndergaard, J., "Aspects of the Matlab Toolbox DACE," Technical Report, *IMM-REP-2002-13*, Denmark.
- [9] 2003, Park, S.H. and Kwon, J.H., "On the Dissipation Mechanism of Godunov-type Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.188, No.2, pp.524-542.
- [10] 2003, Kim, Y., Park, S. H., Sung, C.-H. and Kwon, J.H., "Drag Prediction Workshop Results Using the Parallel Multigrid Solver KFLOW3D," *AIAA 2nd Drag Prediction Workshop*, Orlando.
- [11] 1987, Yates, E.C., Jr, "AGARD Standard Aeroelastic Configurations for Dynamic Response I-Wing 445.6," *NASA TM 100492*.
- [12] 1979, Schmitt, V. and Charpin, F., "Pressure Distributions on the ONERA-M6-Wing at Transonic Mach Numbers," *AGARD AR 138*.