

로봇 시스템의 State Space 모델에 대한
최적 다중-변화 구조제어의 응용연구

이 주 장

한국과학기술대학 전자·전산학부

An Application Study of the Optimal Multi-Variable Structure Control
to the State Space Model of the Robot System

Ju - Jang Lee

Korea Institute of Technology

Abstract

A new control scheme for the state space model of the robot system using the theory of optimal multi-variable structure is presented in this paper. It is proposed to optimize multi-dimensional variable structure systems for obtaining the required stabilizing signal by minimizing a performance index with respect to the state vector in the sliding mode.

It is concluded the proposed variable structure controller yields better system dynamic performance than that obtained by using the only linear optimal controller in that responses for a step disturbance have a shorter setting time, no matter what overshoot values and rising time.

1. 서론

제어기의 가장 간단한 형태중의 하나는 on-off 제어기다. On-off 제어기는 bang-bang 제어개념과 연관되어 최적제어 이론가들에 의해 연구되어 왔다 [1]. 이후, 스윗칭을 이용한 시스템의 제어는 몇몇 경우를 제외하고 소련의 학술지에서 널리 연구되었다 [2, 3, 4]. 스윗칭 제어 법칙에 따르는 동적시스템의 연구에 있어서, 기본적인 수학적 문제로는 오른쪽에 불연속을 가지는 미분 방정식으로 표현되는 것이다. 상미분방정식의 전통적인 existence-uniqueness 이론은 여기서 더 이상 유효하지 않다.

새로운 제어 방법인 최적 다변화 구조이론은 로봇 매뉴플레이터 시스템의 state-space 모델에 적용하고자 한다. 스윗칭 모드에서 state-space

백터의 performance index 를 최소화해서 요구되는 안정화 신호를 구하여 다차원 변화구조 시스템을 최적화하는 것이다. 나아가 다변화 구조 제어기의 시뮬레이션 결과를 분석하고 검토한 후 실제로 디자인하고 제작하는 것이다.

2. 변화구조 제어기 (Variable Structure Controller) 의 기본 개념

1) 전통적인 제어기 디자인의 문제점

변화구조 시스템의 주요 특징은 기존의 제어시스템과는 독립적으로 다른 종류이며 과도 과정중에 시스템 구조에 변화를 야기하는 것이다. 변화구조 시스템의 구조는 어떤 미리 정해진 구조 변화 법칙의 알고리즘에 따라 고의적으로 변화된다. 이 구조변화는 고정된 프로그램에 의해서가 아니라 시간에 따른 오차 신호의 현재값과 그것의 미분값에 따라 결정된다. 과도 변화 동안에 제어기의 디자인에 대한 예측은 넓게 개방되어 있다. 왜냐하면 시스템구조의 변화에 따른 자동 제어 시스템에서 정적 정확성 (안정성, 잡음제거) 과 반응속도 (동적 정확성) 사이에는 항상 상충되기 때문이다. 만약 제어법칙이 직분제어라면 시스템은 단위 입력의 변화의 반응에 있어서 정상 상태 오차는 없다. 더군다나 시스템의 반응 속도를 향상시켜 준다. 반면에 직분기의 이득이 충분히 크면, 이득이 증가함에 따라 overshoot 가 생긴다. 이것은 원하지 않는 바다. 직분제어가 아닌 경우 때 루프 제어시스템의 이득의 증가에 따라서 시스템 반응을 향상시킬 수는 있다. 그러나 시스템에 정상 상태 오차가 나타난다. 따라서 제어 디자이너는 선형적인 함으로 해서 제어를 하는 어떤 타협점에 이르게 된다.

$$u(t) = k_1 x(t) + k_2 \int_0^t x(t) dt \quad (1)$$

여기서 $x(t)$ 는 오차신호이고, k_1 , k_2 는 이득이다.

물론 이 타협 역시 시스템의 정적과 동적 정확성 사이의 상충되는 것을 제거하지는 못한다. 단지 디자이너에게 스스로 만족케 할 뿐이다. 다른 한편으로 볼때, 상충되는 점은 변화구조의 원리를 적용함으로써 해결된다. 제어법칙을 과도 상태 (오차가 충분히 크는 한)의 처음 단계에 적용하면 다음과 같다.

$$u_1(t) = k'x(t), \quad |x(t)| > \epsilon \quad (2a)$$

여기서 ϵ 은 θ 보다 큰 상수이다. 그러나 마지막 단계 (오차가 적을때)에서는 제어법칙은 다음과 같다.

$$u_2(t) = k'' \int_{t_c}^t x(t) dt \quad (2b)$$

여기서 시간 t 가 t_c 보다 클때 $x(t) < \epsilon$ 이며, k' , k'' 는 좋은 동적 특성과 안정상태 특성을 구별할 수 있는 고도의 과도 응답을 보장토록 선택된 적당한 파라미터이다.

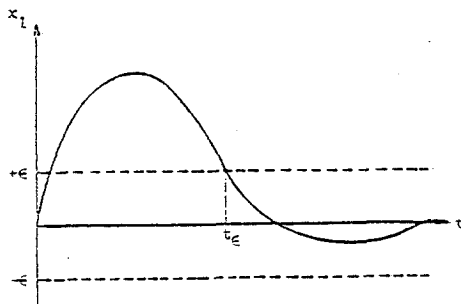


그림 1. 스윙칭에 의한 시스템 구조의 변화

정말로 k' 를 충분히 크게 하면, 시스템의 반응 속도는 빠르다. 따라서 단위 입력의 변화에 대해서 오차 $x(t)$ 는 빠르게 $|x(t)| < \epsilon$ 인 튜브 속으로 들어간다. 시간 t_c 에서 오차는 ϵ 이하로 된다. 시스템의 구조는 적분제어인 식 (2b)로 스윙칭에 의해 바뀐다. 그림 1은 시스템에 남아 있는 정상 상태의 오차를 제거하는 것이다.

2) 변화 구조 제어기

변화구조 시스템 이론의 기본 개념은 Itkis (2)의 책에서 찾아 볼 수 있다. 그림 2는 변화구조 제어기의 가장 간단한 구조이다.

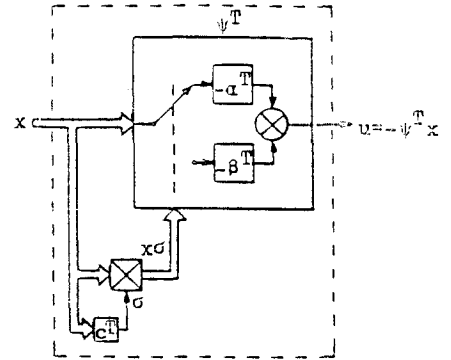


그림 2. 변화구조 제어기

변화구조 제어기의 두가지 중요한 특징은 다음과 같다.

(1) 스윙칭하는 다차원 (Hyperplane)은 다음과 같은 식에 의해 특징지어 진다.

$$\sigma_\lambda(x) = C_\lambda^T x = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

여기서 $C = [C_1, C_2, \dots, C_m]^T$ 는 스윙칭 벡터이다.

(2) 제어 신호는 다음과 같이 주어진다.

$$u_i = -\Psi_{\lambda_i}^T x = -\sum_{j=1}^n \Psi_{\lambda_i j} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

여기서

$$\Psi_{\lambda_i j} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & x_j \sigma_\lambda > 0 \text{ 이면, } i = 1, 2, \dots, m \\ \beta_{ij}, & x_j \sigma_\lambda < 0 \text{ 이면, } j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

새개의 상수 벡터 C , α 와 β 들은 변화구조 시스템의 변화모드의 존재 조건에 의해서 결정된다. 변화구조 시스템의 이론에 따르면, 시스템의 특성은 플랜트에 파라미터 변화에 무감각하다는 것이다. 이러한 것이 시스템에 변화 모드의 존재 결과로서 가장 중요한 것이다. 스윙칭 다차원 (식 (3))에서 변화모드의 존재에 대한 필요, 충분조건은 부등식으로 주어진다.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma \cdot d\sigma/dt \leq \theta \quad (5)$$

부등식 (5)와 제어식 (4)에 의해서, 스위칭 다차원면 ($\sigma(x) = 0$)에서 변화모드의 필요, 충분조건은 다음과 같다.

$$a_{\lambda}^T C = C_{\lambda} (a_{\lambda}^T C) \quad i = k+1, \dots, n-1 \quad (6)$$

$$\alpha_{\lambda} > 1/b^T c - (a_{\lambda}^T C - C_{\lambda} (a_{\lambda}^T C)) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (7)$$

$$\beta_{\lambda} < 1/b^T c - (a_{\lambda}^T C - C_{\lambda} (a_{\lambda}^T C)) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (8)$$

여기서 a_{λ} 는 행렬 A의 i번째 행이며, $k = n-1$ 일때 조건식 (6)은 무의미하다. 그림 3은 3차 시스템에 있어서의 스위칭 궤도들의 예이다.

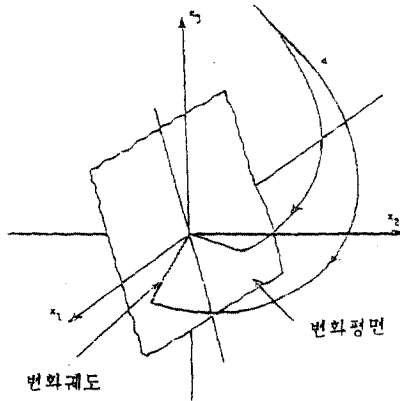


그림 3. 다른 플랜트 행렬에 대한 스위칭 궤도들

3. 최적 다중 변화 구조 제어 (Optimal Multi-Variable Structure Control)

"Cheap" 제어 이론을 사용하여 변화모드에서 방정식을 구하면 다음과 같다. 좌표 변환 정의에 따라

$$Z = Mx \quad (9)$$

또한

$$MB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

이다. 여기서 행렬 M은 $|M| \neq 0$ 인 $n \times n$ 행렬이고, B_z 는 $|B_z| \neq 0$ 인 $m \times m$ 행렬이다. 식 (9)를 시간에 대해서 양변을 미분한 후, state

방정식을 대입하면

$$\dot{z} = MAM^{-1}z + MBu \quad (11)$$

식 (10)을 사용해서 식 (11)을 재정리하여 z 공간에서 state 방정식 형태로 기술하면 다음과 같다.

$$\dot{z}_1 = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 \quad (12)$$

그리고

$$\dot{z}_2 = A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + B_2 u \quad (13)$$

여기서 A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} 는 각각 $(n-m) \times (n-m)$, $(n-m) \times m$, $m \times (n-m)$, $m \times m$ 인 행렬 MAM^{-1} 의 소행렬들이다.

식 (12)와 식 (3)을 함께 변화모드에서 시스템의 운동을 얻거하면 다음과 같다.

$$\dot{z}_1 = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 \quad (14)$$

$$\sigma(z) = C_1 z_1 + C_2 z_2 = 0 \quad (15)$$

여기서 C_1 과 C_2 는 다음 조건을 만족하는 각각 $n \times (n-m)$ 과 $m \times m$ 인 $C^T M^{-1}$ 의 소행렬이다.

$$[C_1 \ C_2] = C^T M^{-1} \quad (16)$$

변화모드에서 두방정식 (14)와 (15)는 $\sigma(z) = 0$ 을 만족하는 스위칭 다차원면의 교차점에 시스템의 동특성을 독특하게 결정한다. 소시스템 (14)는 state 벡터 z_1 과 제어벡터 z_2 를 가진 개루프 제어시스템과 같다. 제어의 형태는 식 (15)에 의해 결정된다. 즉,

$$z_2 = -C_1^{-1} C_2 z_1 \quad (17)$$

따라서 어떤 바람직한 특성을 가진 최적 다변화 제어기의 디자인 문제는 변화모드에서 state 궤환 디자인 문제로 간주될 수 있다.

다음은 z-최적 변화모드에서 스위칭 벡터 C_{λ} 와 제어신호인 u_{λ} 를 계산하는 식을 유도해 보자. 2차식의 실행지수 (Performance index)를 최소화시키는 최적 제어 문제를 변화모드에서 고려해 보자.

$$J = 1/2 \int_{t_0}^{\infty} z^T Q z dt \quad (18)$$

여기서 Q는 실수, 대칭, $|Q| \geq \theta$ 인 행렬이며, t_e 는 변화모드가 시작하는 시간이다. 그러므로 t_e 는 일반적으로 초기상태와 변화구조 시스템의 스위칭 다차원에 달려 있다. 이 문제는 식 (14)의 시스템에 대한 선형 최적상태의 제어문제로 간주된다. 따라서 z_n 에 대해서 다음과 같은 함수의 최소화 문제로 구성된다.

$$J = 1/2 \int_{t_e}^{\infty} (z_1^T Q_{11} z_1 + z_2^T Q_{22} z_2 + z_3^T Q_{33} z_3) dt \quad (19)$$

여기서 Q_{11} , Q_{22} 그리고 Q_{33} 는 각각 $(M^{-1})^T Q M^{-1}$ 의 $(n-m) \times (n-m)$, $(n-m) \times m$ 그리고 $m \times m$ 의 소행렬이다. 식 (19)를 최소화하는 스위칭 다차원면의 선택은 다음 정리에 근거를 두고 있다.

정리 1 : 만약 $Q_{33} > \theta$, (A, B)쌍이 제어 가능이고, $(A_{11} - A_{12} Q_{33}^{-1} Q_{32}^T, D)$ 쌍이 관측 가능이면, 여기서 $DD^T = Q_{11} - Q_{12} Q_{33}^{-1} Q_{21}^T$, 제어역할을 하는 식 (14)의 최적백터 z_n 는 다음과 같이 주어진다.

$$z_n = -Q_{33}^{-1} A_{12}^T P z_1 - Q_{33}^{-1} Q_{32}^T z_1 \quad (20)$$

여기서 P는 대수행렬 Riccati 방정식에 해이며, 다음 조건을 만족한다.

$$P(A_{11} - A_{12} Q_{33}^{-1} Q_{32}^T) + (A_{11} - A_{12} Q_{33}^{-1} Q_{32}^T)^T P - P A_{12} Q_{33}^{-1} A_{12}^T P + D^T D = \theta \quad (20a)$$

스위칭 다차원면의 결정은 다음과 같다.

$C_{11} = I$ 일때 식 (17)에서 스위칭 다차원면은 다음과 같다.

$$z_2 = -C_{11} z_1 \quad (21)$$

식 (21)과 식 (20)을 비교하면 C_{11} 은 다음과 같이 된다.

$$C_{11} = Q_{33}^{-1} A_{12}^T P + Q_{33}^{-1} Q_{32}^T \quad (22)$$

식 (16)은 다음과 같이 된다.

$$C^T = [C_{11} \quad I] M \quad (23)$$

따라서 스위칭 다차원면은 다음과 같이 된다.

$$\alpha_i(x) = C_i^T x = \theta, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (24)$$

4. 로봇트 매뉴플레이터 시스템의 제어

정확성, 원하는 궤도의 고속 추적 등은 현대 산업 로봇트와 매뉴플레이터의 발달로 인하여 제어문제로 크게 대두되고 있다. 특별히, 이러한 로봇트들의 운동방정식은 비선형이고 여러가지가 복합적으로 결합되어 있다. 공장자동화 시스템의 발달에 있어서 외부 교란과 아울러 부하, 일량, 실시간 궤도내역 등의 변화로 인하여 자동화 수행에 막대한 영향을 끼친다. 이러한 복잡성 때문에, 어떤 제어방법론도 이러한 문제들을 해결하지 못하고 있다. 변화모드 전환제어기는 파라미터값의 어떤 변화에 대해서 강하게 대처해 나간다.

그림 4의 두개의 링크를 가진 매뉴플레이터 (수정면에서)는 공히 길이 l , 질량 m 인 에이이다. State 변수로는 첫번째 링크에서 x 축과 이루는 각이 θ_1 , 첫번째 링크에 대한 두번째 링크와 이루는 각이 θ_2 , 각속도는 $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ 둘이다. 그리고 두 연결점에 인가되는 토크는 각각 T_1 , T_2 이다. 따라서 다음과 같은 매뉴플레이터의 방정식을 얻을 수가 있다.

$$\ddot{\theta}_1 = (2/3 T_1' - (2/3 + \cos \theta_2) T_2') / (16/9 - \cos^2 \theta_2) \quad (25)$$

$$\ddot{\theta}_2 = [-(2/3 + \cos \theta_2) T_1' + 2(5/3 + \cos \theta_2) T_2'] / (16/9 - \cos^2 \theta_2) \quad (26)$$

여기서

$$T_1' = 2T_1 + \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

그리고

$$T_2' = 2T_2 - \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2$$

또한 u_1 과 u_2 는 다음과 같다.

$$u_1 = 4/3 T_1 - (4/2 + 2 \cos \theta_2) T_2 \quad (27)$$

$$u_2 = -(4/3 + 2 \cos \theta_2) T_1 + (20/3 + 4 \cos \theta_2) T_2 \quad (28)$$

따라서 식 (25), (26), (27), (28)을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\theta_1 = (2/3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + (2/3 + \cos \theta_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 + u_1) / (16/9 - \cos^2 \theta_2) \quad (29)$$

$$\theta_2 = (- (2/3 + \cos \theta_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - 2(5/3 + \cos \theta_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 + u_2) / (16/9 - \cos^2 \theta_2) \quad (30)$$

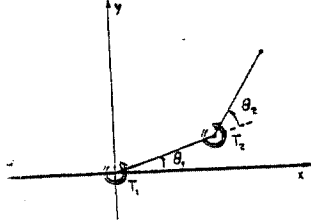


그림 4. 두링크 매뉴플레이터

Melouah and André (5)의 선형화하는 방법을 이용하면 식 (29)와 (30)은 다음의 일반적인 state-space 방정식 형태로 쓸 수 있다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (31)$$

따라서 변화구조 시스템의 디자인 과정은 다음과 같다.

(1) 식 (9)에서 좌표 변환 행렬 M 을 구한다.

(2) 식 (29a)에서 대수 행렬 Riccati 방정식에서 P 를 구한다.

(3) 스렛칭 벡터 C_2 를 계산한다.

(4) 스렛칭 다차원면에 대한 방정식을 선택한다.

$$\sigma = (C_1 \ I)Mx = Cx = 0$$

(5) 식 (6), (7), (8)에서 변화구조의 제어신호 Ψ 를 계산한다.

5. 결론

다변화 구조 시스템에 대한 디자인 기술이 최적 다변화 구조방법에 의해 개발되었다. 제한된 방법은 최적 다변화 구조 시스템에 대한 규칙적인 과정이다. 최적 다변화 구조 제어기의 주요 특징이 동적 수행면에서 전통적인 선형 최적 제어기나 단순한 변화구조 제어기보다 더 좋은 결과를 얻을 수 있다는 것을 CSMP III 또는 ACSL 소프트웨어를 사용하여 시뮬레이션 해보면 알 수 있다. 이 방법의 응용에는 로봇트 매뉴플레이터 시스템뿐만 아니라 모든 state-space 방정식 형태로 나타낼 수 있는 시스템의 제어기 디자인에 이용할 수 있다.

아직도 더 해결해야 할 문제점은 첫째로 주파수 영역에서 이 제어기는 쉽게 볼 수 없는 것과 둘째로 대수행렬 Riccati 방정식에서 P 를 계산하는데 많은 시간이 소비되어 실시간 제어가 힘든 일, 셋째로 실제로 최적 다변화 구조 제어기를 제작하여 설치하기 위해서 많은 하드웨어적 분석 및 연구가 뒤따라야 한다.

참고문헌

1. Flügge-Letz, I., "Discontinuous Automatic Control", 1953, Princeton University Press.
2. Itkis, V., "Control Systems of Variable Structure", 1976, New York, Wiley.
3. Utkin, V. I., IEEE Trans. Automatic Control, 22, 212, 1977; "Sliding Mode and its Applications to Variable Structure Systems", 1978, Moscow: Mir.
4. Young K. K. D., "Controller Design for Manipulator using Variable Structure Systems", IEEE Trans. Syst. Man Cybernet., 8, 101, 1978.
5. Melouah H. and André P., "High Speed Computation of the Inverse Jacobian Matrix and Servo Inputs for Robot Arm Control", Proc. 21st IEEE Conf. on Design and Control, 1982, Florida, pp. 89-94.