한국소음진동공학회 2005년도 추계학술대회논문집, pp. 337~340.

극직교 이방성 회전원판의 진동특성 및 임계속도

Vibration Analysis and Critical Speeds of Rotating Polar Orthoropic Disks

구 교 남* · 한 재 흥**

Kyo-Nam Koo and Jae-Hung Han

Key Words : Speed(임계속도), Composite Material(복합재료), Rotating Disk(회전 원판), CD

ABSTRACT

Rotating annular disks are widely used in data storage devices such as CDs, DVDs(digital versatile disks), and HDs(hard disks). Higher data transfer rate in data storage disks could not be achieved by polycarbonate disks in the present market. The problem can be solved by applying the fiber-reinforce composite materials to the disks. In this paper, an application of composite materials to rotating disks is proposed to increase the critical speed. Dynamic equation is formulated in order to calculate the natural frequency and critical speed for rotating composite by the Galerkin method. The results show that the radially reinforced disk is more effective in increasing critical speed than the circumferentially reinforced disk.

1. 서론

환형판(annular disk) 또는 원판(circular disk)은 산업기기에서 매우 다양한 형태로 사용되고 있다. 그 응용사례로는 원형 전기톱, 터빈, 브레이크 디스크 등 전통적인 산업기계뿐만 아니라 최근 하드 디스크, CD-ROM(compact disk), DVD-ROM(digital versatile disk) 등의 정보저장기기 등을 들 수 있다. 취급하는 정보량이 증가함에 따라 정보 전달속도를 높이기 위해 이들 정보저장기기에 들어가는 디스크의 회전속도의 증가도 급격하게 이루어지고 있다. 현재 시판되고 있는 CD-ROM의 최대 회전속도는 52배속이며 디스크의 임계속도(critical speed)는 약 7,000 rpm 정도로 이미 초임계속도(supercritical speed)에서 구동되고 있다.[1]

등방성 회전원판의 진동을 다룬 초기의 논문들은 주로 고유진동수를 다루었다. 특히 Lamb과 Southwell[2]의 논문은 이 분야의 효시로 회전원판의 고유진동수는 원심력에 의한 응력과 휨 응력을 별도로 구한 뒤 그 조합으로 표현될 수 있음을 보였다. 이승엽 등[3]은 CD 등 정보저장기기의 임계속도 및 플러터 불안정성에 대한 연구를 수행한 바 있다.

복합재료 회전 원판에 대한 진동해석은 많지 않은 형편이다. Ghosh[4]는 열응력이 회전하는 극직교 이방성 원판(polar orthotropic disk)의 횡진동에 미치는 영향을 살펴보았다. 그는 열응력에 의한 파괴 회전속도도 구하였으나 직교 이방성이나 회전속도에 따른 진동특성에 따른 연구결과는 제시하지 않았다. Son 등[5]은 횡하중과 열하중을 받는 이방성 회전원판의 진동문제에 대해 횡전단변형과 회전관성을 고려하여 유한요소 정식화를 수행하고 직교 이방성 회전원판에 적용하였다. 그러나 그들이 적용한 예제는 폴리카본네이트 기판과 알루미늄 층으로 이루어진 적층판으로 반경방향과 원주방향의 물성치가 같은 원판이었다.

이상에서 살펴본 바와 같이 극직교 이방성을 포함한 복합재료 원판의 진동해석에 대한 연구는 매우 부족한 실정이며 회전하는 복합재료 원판의 진동해석 및 임계속도에 대한 연구는 전무한 상황이다. 따라서 본 연구에서는 회전원판의 임계속도를 증가시키기 위해 섬유강화복합재료를 회전원판에 적용하였다. 극직교 이방성 회전원판의 임계속도를 구하기 위해 지배방정식의 정식화를 수행하고 CD와 같은 제원을 갖는 원판에 섬유강화 복합재료를 적용해 임계속도를 변화를 살펴보았다.

2. 회전 원판의 진동방정식

섬유강화 복합재료를 환형판에 적용하는 방법을 Fig. 1과 같이 두 가지 방법을 생각할 수 있다. (a)는 섬유를 반경방향으로 배열한(Radially-reinforced: RR) 원판이며 (b)는 섬유를 원주방향으로 배열한(Circumferentially-reinforced: CR) 원판이다. 두 가지 경우 모두 극직교 이방성 원판으로

* 울산대학교 항공우주공학과
E-mail : knkoo@mail.ulsan.ac.kr
Tel : (052) 259-1261, Fax : (052) 259-1682
** 한국과학기술원 항공우주공학과

모델링할 수 있으며 응력-변형율 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1/E_r & -\nu_{\theta r}/E_\theta & 0\\ -\nu_{r\theta}/E_r & 1/E_\theta & 0\\ 0 & 0 & 1/G_{r\theta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{Bmatrix} \tag{1}$$

여기서 r은 반경방향, θ는 원주방향을 나타내며 $\nu_{r\theta}/E_r = \nu_{\theta r}/E_\theta$인 관계가 성립한다.

회전속도 Ω인 원판의 동적거동은 Fig. 2에 정의된 것과 같이 원판에 부착된 회전좌표계 $r-\theta$ 좌표계와 회전하지 않는 관성좌표계인 $r-\phi$ 좌표계로 기술할 수 있으며 원판의 변위는 $r-\theta$ 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}u_r &= u_r^0 - z\frac{\partial w}{\partial r}\\ u_\theta &= u_\theta^0 - z\frac{\partial w}{r\partial\theta}\\ w &= w\end{aligned} \tag{2}$$

식 (2)의 변위를 이용하면 다음과 같이 휨(bending)에 의한 변형율을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = z\chi_r\\ \varepsilon_\theta &= -z\left(\frac{\partial w}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2}\right) = z\chi_\theta\\ \gamma_{r\theta} &= -2z\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{r\partial r\theta}\right) = z\chi_{r\theta}\end{aligned} \tag{3}$$

식 (1)과 (3)을 이용하여 응력을 두께방향을 적분하여 모멘트를 구하고 z-방향으로의 평형방정식에 대입하면 횡변위 w에 대한 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}&D_r\left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+2\frac{\partial^3 w}{r\partial r^3}\right)+D_\theta\left(\frac{\partial^4 w}{r^4\partial\theta^4}+2\frac{\partial^2 w}{r^4\partial\theta^2}-\frac{\partial^2 w}{r^2\partial r^2}\right.\\ &\left.+\frac{\partial w}{r^3\partial r}\right)+2(\nu_{\theta r}D_r+2D_{r\theta})\left(\frac{\partial^4 w}{r^2\partial r^2\partial\theta^2}-\frac{\partial^3 w}{r^3\partial r\partial\theta^2}\right.\\ &\left.+\frac{\partial^2 w}{r^4\partial\theta^2}\right)-\frac{\partial}{r\partial r}\left(\overline{N}_r r\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\overline{N}_\theta\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right)\\ &+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q_z\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $\overline{N}_r$과 $\overline{N}_\theta$는 각각 r과 θ 방향으로의 평면력, ρ는 원판의 밀도, q_z는 원판에 작용하는 횡하중이며 D_r, D_θ, $D_{r\theta}$는 휨 강성이다.

식 (4)에서 $\overline{N}_r$과 $\overline{N}_\theta$는 미지수로 r-방향으로의 지배방정식으로 결정된다.

$$-\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{N}_r)-\frac{\partial\overline{N}_{r\theta}}{\partial\theta}+\overline{N}_\theta = rq_r \tag{5}$$

여기서 반경방향으로의 하중 q_r은 원심력에 의해 $q_r=\rho\Omega^2 r$로 주어지고, 축대칭 문제이므로 $\overline{N}_{r\theta}=0$이 되며 $\overline{N}_r$과 $\overline{N}_\theta$은 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{N}_r = \frac{E_r h}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}\left(\frac{d\overline{u}_r}{dr}+\nu_{\theta r}\frac{\overline{u}_r}{r}\right) \tag{6-a}$$

$$\overline{N}_\theta = \frac{E_\theta h}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}\left(\nu_{r\theta}\frac{d\overline{u}_r}{dr}+\frac{\overline{u}_r}{r}\right) \tag{6-b}$$

식 (6)을 식 (5)에 대입하며 정리하면

$$r^2\frac{d^2\overline{u}_r}{dr^2}+r\frac{d\overline{u}_r}{dr}-\mu^2\overline{u}_r = \frac{(\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}-1)\rho r^3\Omega^2}{E_r} \tag{7}$$

식 (7)에서 $\mu^2=E_\theta/E_r$로 정의되며 $r=b$에서 고정되고 $r=a$에서 자유인 경계조건은 다음과 같다.

$$\overline{u}_r(r=b)=0, \quad \overline{N}_r(r=a)=0 \tag{8}$$

식 (10)의 경계조건을 적용하여 $\overline{u}_r$을 구하고 식 (6)에 대입하면 원심력에 의한 평면력을 구할 수 있다.
식 (4)에서 자유진동해석을 위해 횡하중 $q_z=0$으로 하고 변형의 축대칭성을 고려하여 $w=e^{i\omega t}R(r)\cos n\theta$로 변수분리하면 식 (4)는 다음과 같은 고유치문제가 된다.

$$\mathcal{L}[R]-\rho h\omega^2 R=0 \tag{9}$$

여기서 $\mathcal{L}$는 상미분 연산자이다. 상미분방정식은 해는 $R(r,t)=\sum_{k=1}^{N}q_k f_k(r)$와 같이 급수해를 가정하여 갤러킨(Galerkin) 방법으로 구한다.

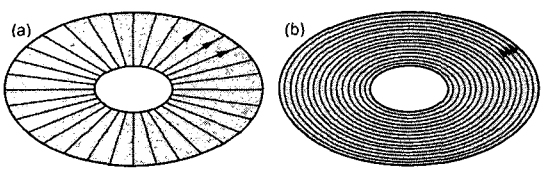

Fig. 1 (a)RR composite disk and (b) CR composite disk

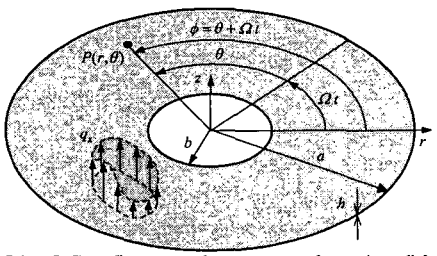

Fig. 2 Coordinates and geometry of rotating disk

$$\int_b^a \left(D[\sum_{k=1}^{N} q_k f_k] - \rho\omega^2 \sum_{k=1}^{N} q_k f_k \right) f_i dr = 0 \qquad (10)$$

여기서 $f_k(r) = (r-b)^{k+1}$와 같은 다항식을 사용하면 수렴성이 떨어지므로 참고문헌 [6]에서 사용한 직교함수를 사용한다.

식 (10)의 해는 회전좌표계에 대한 고유진동수이므로 고정좌표계에 대한 진동수는 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} -i(\omega_{mn} + n\Omega) \\ i(\omega_{mn} - n\Omega) \end{cases} \qquad (11)$$

여기서 $\omega_{mn} + n\Omega$는 전진파의 진동수이며 $\omega_{mn} - n\Omega$는 후진파의 진동수이다. $\omega_{mn} - n\Omega = 0$을 만족하는 Ω가 임계속도가 된다.

3. 계산결과 및 검토

회전 원판의 진동특성 및 임계속도를 계산하기 위해 다음과 같은 제원을 갖은 CD-ROM에 적용하였다.

$$b = 15 \text{ mm}, \quad a = 60 \text{ mm}, \quad h = 1.2 \text{ mm}$$

계산에 사용된 재료의 물성치는 Table 1과 같으며 E_1은 섬유방향의 탄성계수, E_2는 섬유에 수직한 방향의 탄성계수, G_{12}는 전단계수, ν_{12}는 포아송 비이며, ρ는 밀도이다. Table 1에서 PC(Polycarbonate)는 일반 CD의 기판재료이고 CFRP(Carbon Fiber-Reinforced Plastic)는 고강도, 고강성 탄소섬유 복합재료 T300/N5208이다.

3.1 일반(PC) CD

이론의 타당성을 검증하고 등방성 회전원판의 진동특성 및 임계속도를 조사하기 위해 일반 폴리카보네이트 CD에 대한 해석을 수행하였다. Table 2는 비회전 CD의 고유진동수를 나타낸다. 참고문헌 [7]의 결과와 매우 잘 일치하는 결과를 주고 있음을 확인할 수 있다.

Table 1 Material properties.

Material	E_1(GPa)	E_2(GPa)	G_{12}(GPa)	ν_{12}	ρ(kg/m^3)
PC(CD)	2.2	2.2	0.846	0.30	1220
CFRP	181.0	10.3	7.17	0.28	1600

Table 2 Natural frequencies(Hz) of non-rotating CD

m \ n		0	1	2	3	4	5
0	Present	125.9	121.0	153.2	277.3	472.6	722.4
	Ref. 7	125.9	120.9	153.1	277.1	472.6	723.1
1	Present	796.4	842.3	989.8	1253.7	1632.2	2107.4
	Ref. 7	796.1	842.0	988.9	1251.4	1627.9	2099.7
2	Present	2333.3	2390.1	2568.8	2887.2	3358.1	3975.4
	Ref. 7	2313.4	2369.2	2543.7	2851.5	3303.1	3894.9

회전속도(rpm)에 따른 CD의 고유진동수를 Fig. 3에 도시하였다. f는 전진파를 b는 후진파를 나타낸다. 모드 분리에 의한 후진파의 고유진동수가 영이 되는 임계속도는 약 7064 rpm으로 $(0,2)$ 모드에서 나타나고 있다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 임계 모드가 될 가능성이 있는 모드는 절원의 개수가 영이 되는 $(0,n)$ 모드이므로 원주방향으로 강성을 높인다면 임계속도가 증가할 수 있을 것임을 예상할 수 있다. 또한 반경방향으로의 강성을 증가시킨다면 비회전

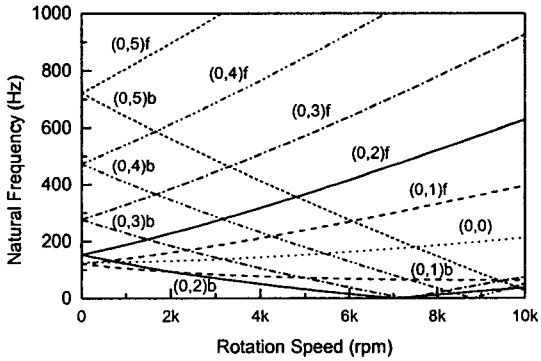

Fig. 3 Frequency-speed diagram for CD-ROM

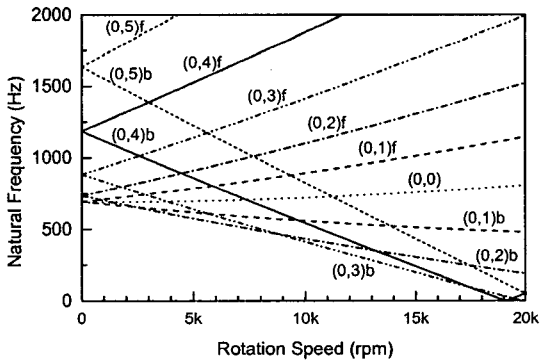

Fig. 4 Frequency-speed diagram for RR CFRP disk.

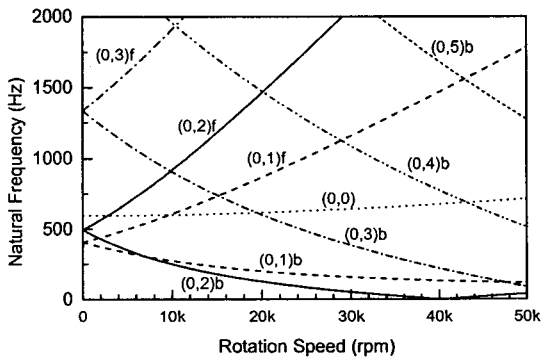

Fig. 5 Frequency-speed diagram for CR CFRP disk.

원판의 고유진동수가 증가하므로 이도 임계속도를 증가시킬 것으로 예상되나 어느 것이 효과적일 것인가는 다음 절에서의 해석결과를 통해 살펴 볼 수 있다.

3.2 복합재료(CFRP) CD

앞서 언급한 바와 같이 정보저장용 CD를 직교이방성 복합재료로 만들었을 때의 임계속도를 계산한다. 직교이방성 원판은 Fig. 1과 같이 반경방향으로 보강된(RR) 판과 원주방향으로 보강된(CR) 판으로 고려할 수 있다. 탄소섬유/에폭시 복합재료의 물성치는 Table 1에 제시되어 있으며 각각의 경우 물성치는 다음과 같이 고려해야한다.

RR disk: $E_r = E_1,\ E_\theta = E_2,\ G_{r\theta} = G_{12},\ \nu_{r\theta} = \nu_{12}$

CR: disk: $E_r = E_2,\ E_\theta = E_1,\ G_{r\theta} = G_{12},\ \nu_{r\theta} = \nu_{21}$

Fig. 4는 반경강화 CFRP 원판의 회전에 따른 진동수의 변화를 나타내고 있으며 변화양상이 거의 직선의 형태를 띠고 있다. 임계속도는 19,107 rpm으로 (0,4) 모드에서 나타나고 있는데 이는 비회전 원판에 대한 (0,1), (0,2), (0,3) 모드의 고유진동수가 비교적 높고 (0,4)모드의 진동수가 상대적으로 낮기 때문이다.

Fig. 5는 원주강화 CFRP 원판의 회전수에 따른 진동수의 변화를 보여준다. 임계모드는 (0,2) 모드이며 임계속도는 40,220 rpm으로 일반 CD의 약 5.7배로 큰 폭의 증가를 보인다. Fig. 4와 Fig. 5를 비교하면 알 수 있듯이 임계모드는 (0,2) 모드와 고차 모드의 고유진동수의 차이가 클 때 (0,2) 모드로 나타나고 그렇지 않으면 (0,2) 모드 이상의 모드에서 나타나고 있음을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 직교이방성 재료로 구성된 회전 원판의 진동 방정식을 정식화하였으며 다항식을 이용하여 급수해를 구하였다. 계산에 적용된 회전 원판은 대표적인 회전체인 CD-ROM을 선정하였다.

대표적인 복합재료인 탄소섬유강화 복합재료(CFRP)를 CD에 적용한 결과 기존 폴리카보네이트 수지로 만들어진 일반 CD보다 훨씬 높은 임계속도를 갖고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 임계속도를 향상시키기 위해서는 반경강화 회전원판보다는 원주강화 회전원판이 매우 효과적이라는 결론을 얻을 수 있었다.

참 고 문 헌

(1) Lee, S.-Y., Kim, J.-Y., and Lim, S., 2002, "Critical and Flutter Speeds of Optical Disks," Microsystem Technologies, Vol. 8, pp. 206-211.

(2) Lamb, H., and Southwell, R. V., 1921, "The Vibration of a Spinning Disk," Proceedings of the Royal Society, Vol. 99, pp. 272-280.

(3) 이승엽, 윤동화, 2001, "정보저장기기용 회전디스크의 임계속도 및 플러터 속도에 관한 연구," 한국소음진동학회 2001년도 추계학술대회 논문집, pp. 484-489.

(4) Ghosh, N. C., 1985, "Thermal Effect on the Transverse Vibration of High Speed Rotating Anisotropic Disk," Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 543-548.

(5) Son, H., Kikuchi, N., Ulsoy A. G., and Yigit A. S., 2000, "Dynamics of Prestressed Rotating Anisotropic Plates Subject to Transverse Loads and Heat Sources, Part I: Modelling and Solution Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 236, No. 3, pp. 457-485.

(6) Kim, C. S. and Dickinson, S. M., 1989, "On the Lateral Vibration of Thin Annular and Circular Composite Plates Subject to Certain Complicating Effects," Journal of Sound and Vibration, Vol. 130, No. 3, pp. 363-377.

(7) 신응수, 이기녕, 신태명, 김옥현, 2002, "속도변동성분을 갖은 회전디스크의 횡진동 안정성 해석," 한국소음진동학회논문집, 제12권, 제1호, pp. 21-28.