

기하학적 비선형성을 갖는 유연한 평면 다물체계의 운동 해석

한재흥*, 이인(한국과학기술원)

1. 서론

오늘날 여러 공학 분야에서 설계와 운용 도구로서 유연 기계 구조물의 정확한 해석의 역할이 날이 증가하고 있다. 로봇 암, 차량, 고속회전 기계류와 같은 시스템은 운전 속도와 생산성에 대한 요구 조건이 높아지면서 부재의 탄성 변형이 커져서, 강체로 해석한 것과 탄성을 고려한 해석과는 많은 차이를 보이고 있다. 한편 우주 구조물은 거대화 경량화 추세가 계속되어서, 탄성 변형을 고려한 동적 특성 해석에 대한 연구가 매우 중요하게 되었다.

다물체 동역학에 관한 연구는 우주 항공, 기계 및 기구, 로봇 분야로 나뉘어 독립적으로 발달해 왔다. 1970년대까지는 강체 모델 해석 또는 부분적인 탄성을 고려하는 운동 해석이 대부분이었으나, 1980년대 들어와서는 위의 세 분야 모두 다관절 유연 구조(articulated flexible structure)의 운동 해석에 관심이 모아졌다. Song과 Haug[1]는 유한요소법을 이용하여 2차원 탄성 부재와 강성 부재를 모두 고려할 수 있고, 강체 운동과 탄성 변형 운동의 연계 효과를 모두 고려할 수 있는 체계적인 방법을 제시하였다. Agrawal과 Shabana[2]는 참고문헌[1]의 방법을 발전시켜 탄성체의 변형을 강체 모드(rigid body mode), 기준 모드(reference mode), 정규 모드(normal mode)로 나타내어 정식화하였다. 한편 García de Jalón[3,4] 등은 회전좌표를 사용하지 않고 강체의 위치를 나타내는 방법을 제시하였다. 그들은 3차원상의 강체의 위치를 표시하기 위하여 강체 위의 둘 이상의 점의 좌표와 강체에 부착되어 있는 하나 이상의 단위 벡터의 성분을 일반좌표로 사용하였다.

탄성체의 부유 좌표계에 대한 변형을 정의하는 방법에는 유한요소법을 이용하는 절점좌표와 모드좌표가 있다. 보통 탄성체의 층돌 변형 등 국부적인 변형 현상에 관심이 있는 경우를 제외하고는 좌표수를 많이 줄일 수 있는 모드좌표를 많이 사용한다. Yoo와 Haug[5-6]는 정규 진동 모드외에 조인트 등에 걸리는 국부적인 힘에 의한 변형을 보완하기 위하여 정적 보상 모드(static correction mode)를 사용하였다.

Bark와 Shabana[7]은 참고문헌[2]의 방법을 사용하고 비선형 변위-변형을 관계를 적용하여 기하학적 강성 강화를 고려한 다물체계의 운동을 해석하였다.

본 연구는 여러가지 조인트로 연결된 평면 탄성 다물체계의 체계적인 운동방정식 유도과 효율적인 컴퓨터 프로그램을 개발함을 목적으로 한다. 또한 2차원 보의 경우에 한해 기하학적 비선형성을 고려한 정식화를 하였다. 탄성체마다 부유 좌표축을 하나씩 정의하고 원점을 임의로 선택한다. 물체의 자세를 나타내기 위한 기존의 회전좌표를 사용하지 않고 부유 좌표축의 두 단위 벡터의 성분으로 물체의 자세를 나타내어 식의 유도를 용이하게 하였다. 탄성체의 변형은 진동 모드 좌표로 표현하고 유한요소 해석시 요소의 질량은 절점에 집중되어 있다고 가정한다.

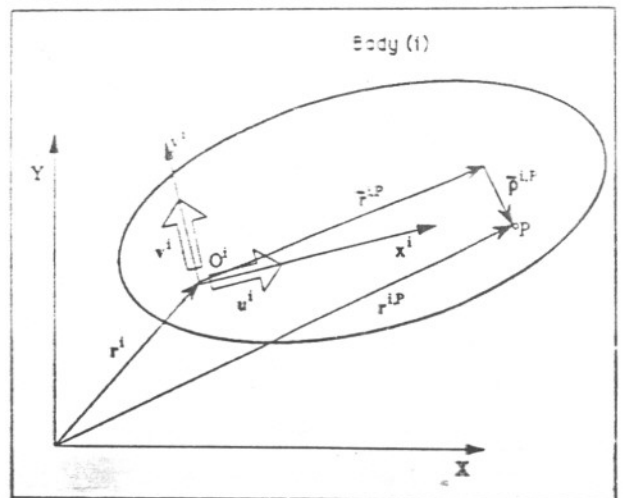


그림 1. 좌표계와 일반좌표

2. 좌표계와 운동에너지

그림 1에서 XY 좌표계는 관성 좌표계이며, $x^i y^i$ 좌표계는 물체 i에 설정된 부유 좌표계이다. 물체의 방향을 나타내기 위해 그림 1과 같이 부유 좌표계의 xy 방향을 나타내는 두 단위 벡터 u^i, v^i 를 설정한다. 변형전 $x^i y^i$ 좌표계에서의 위치가 $r^{i,P}$ 로 정의되는 탄성체 i위의 점 P

의 변위를 $\bar{p}^{i,P}$ 라 하면 변형후 관성 좌표계에 대한 점 P의 위치벡터는 다음과 같다.

$$\bar{r}^{i,P} = r^i + S^i(\bar{r}^{i,P} + \bar{p}^{i,P}) \quad (1)$$

여기서 S^i 는 물체 i의 부유 좌표계 $x^i y^i$ 로부터 관성 좌표계 XY으로의 좌표 변환 행렬이며 식 (2)와 같다.

$$S^i = \begin{bmatrix} u^i & v^i \end{bmatrix} \quad (2)$$

점 P의 변위 $\bar{p}^{i,P}$ 는 변형 모우드를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{p}^{i,P} = \phi^{i,P} \eta^i \quad (3)$$

여기서 $\phi^{i,P}$ 는 물체 i의 모우드 행렬로부터 점 P의 병진 변위 성분만을 뽑아낸 행렬이며, η^i 는 물체 i의 모우드좌표이다. 물체 i의 일반좌표 \hat{x}^i 를 다음과 같이 정의하자.

$$\hat{x}^i = \begin{bmatrix} r^{i,T} & u^{i,T} & v^{i,T} & \eta^{i,T} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

편의상 $\bar{r}^{i,P}$ 와 $\phi^{i,P}$ 를 식 (5)와 같이 x^i, y^i 성분으로 나누어 표시하면, 점 P의 속도는 식 (6)과 같다.

$$\bar{r}^{i,P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \phi^{i,P} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\bar{r}^{i,P} = r^i + \begin{bmatrix} u^i & v^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \eta^i + S^i \phi^{i,P} \eta^i \quad (6)$$

물체 i의 운동에너지 T^i 는 식 (7)과 같다. 물체 i의 일반질량행렬 \hat{M}^i 는 상수가 아닌 일반좌표의 함수이다.

$$T^i = \frac{1}{2} \int_{\text{body } i} (\bar{r}^{i,P})^T \bar{r}^{i,P} dm = \frac{1}{2} \hat{x}^{i,T} \hat{M}^i \hat{x}^i \quad (7)$$

3. 탄성에너지

그런 변형을 (Green strain) 벡터 ϵ 과 물체의 변위장 u 는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\epsilon = Du = (D_1 + D_2)u \quad (8)$$

여기서 D_1, D_2 는 각각 선형, 비선형 미분연산자이다. 본 연구에서는 물체내의 임의점의 변형은 변형 모우드 ϕ 를 사용하여 표시하므로 변형을 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon = D\phi \eta \quad (9)$$

선형 응력 변형을 관계만을 고려하기로 하면 물체 i의 탄성에너지 U^i 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U^i = \frac{1}{2} \eta^{i,T} \int_V (D\phi^i)^T E (D\phi^i) dV \eta^i = \frac{1}{2} \eta^{i,T} k_{\eta\eta}^i \eta^i \quad (10)$$

$D = D_1 + D_2$ 이므로 $k_{\eta\eta}^i$ 를 선형 부분과 비선형 부분으로 나누어 쓸 수 있다.

$$k_{\eta\eta}^i = (k_{\eta\eta}^i)_E + (k_{\eta\eta}^i)_G \quad (11)$$

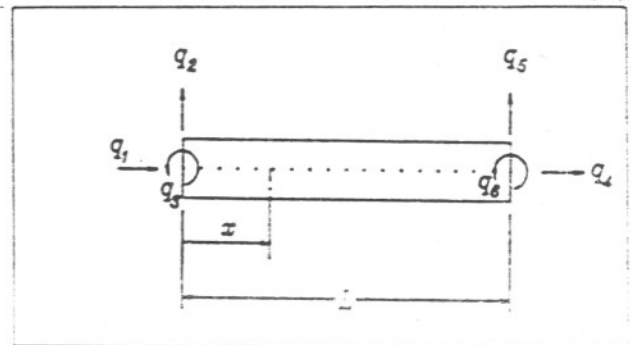


그림 2. 보 요소 (ij)와 결점좌표

그림 2와 같이 결점당 3개의 자유도를 갖는 2결점 2차원 보 요소의 탄성에너지를 구하기로 하자. 대변위를 고려한 보 요소의 탄성에너지는 다음과 같다.

$$U^{ij} = \left\{ \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \quad (12)$$

위 식의 마지막 적분항은 기하학적 비선형성을 고려하여 추가된 항이다. 형상 함수를 사용하면 식 (13)과 같이 보 요소의 탄성에너지를 결점좌표로 표시할 수 있고 Castigliano 법칙을 이용하면 보 요소의 선형, 비선형 강성행렬을 구할 수 있다.

$$U^{ij} = \frac{1}{2} (q^{i,j,T} k_E^{ij} q^{i,j} + q^{i,j,T} k_G^{ij} q^{i,j}) \quad (13)$$

여기서 k_E^{ij} 는 기존의 선형 강성행렬이고, k_G^{ij} 는 보의 대변위를 고려하여 생긴 비선형 강성행렬로서 참고문헌[10]에 상세히 기술되어 있다. 각 요소의 강성행렬을 구한 후 일반 유한요소 해석시와 같은 방법으로 전체 강성행렬로 조립하면 물체 i의 탄성에너지는 다음과 같다.

$$U^i = \frac{1}{2} (q^{i,T} k_E^i q^i + q^{i,T} k_G^i q^i) \quad (14)$$

여기서 Φ_x 는 단위 벡터 구속조건 $\text{norm}(u^i)=1$ 을 포함하는 모든 구속조건식 $\Phi=0$ 의 자코비안 행렬이고 λ 는 라그랑지 승수이며 g 는 x 의 비선형 항(2차 다항식)을 나타낸다. 위 방정식의 질량행렬 M 은 물체의 강체 회전 운동에 의해 유발되는 관성변화 때문에 선형 진동 해석 시와 달리 상수가 아니며, 강성행렬 K 도 비선형 변위-변형을 관여 때문에 상수가 아니다. K 는 선형 강성행렬 K_E 와 비선형 강성행렬 K_G 의 합으로 이루어져 있고 K_E 는 상수이므로 해석에 사용할 모드 형상이 결정되면 계산할 수 있으나 K_G 는 매 시간간격마다 유한요소 해석을 하여 계산하여야 한다. 시스템의 운동은 운동방정식 (28)과 구속조건 그리고 초기치에 의해 지배된다. 주어진 초기치는 $t=0$ 일 때 구속조건식을 만족하여야 한다.

6. 수치여제 및 검토

강체크랭크 OA와 원형 단면을 가진 유연한 브로 가정될 수 있는 커넥팅로드 AB로 이루어진 슬라이더-크랭크 기구(그림 3)의 운동을 해석하였다. 모든 치수와 재료물성치는 참고문헌[7]과 같다. AB는 횡방향과 축방향으로 모두 변형이 가능하고 크랭크 OA는 150rad/sec의 속도로 구동된다고 할 때 AB의 중앙점 P의 운동을 살펴 보았다. 중앙점 P의 변위 v 를 L 로 나눈 무차원수를 크랭크 각 θ 의 함수로 도시하였다.

본 연구의 결과를 참고문헌[7]과 비교하기 위해 커넥팅로드 AB를 2개의 요소로 나누어 모델링한 후 단순지지 경계조건을 적용하고 모우드를 구하여 운동을 해석하였으며 선형결과와 함께 그림 4에 도시하였다. 6개의 모우드를 사용한 참고문헌[7]과는 달리 본 연구에서는 집중 질량을 가정하고 정식화하였기 때문에 3개의 모우드만을 취해 해석하였지만 비교적 참고문헌[7]의 결과와 잘 일치하고 있다. 그림 5는 10개의 요소를 사용하여 모우드를 구한 후 처음 6개의 모우드를 택하여 해석한 결과이다. 그리고 기하학적 비선형성을 구현하기 위한 요소의 수를 달리 해 가면서 해석해 보았다. 2개의 요소만 사용하더라도 매우 좋은 결과를 보이고 있다. 그림 4와 5를 비교해보면 그림 5의 결과가 전체적으로 변형이 크음을 알 수 있다. 이것은 모우드를 구할 때 요소수를 많이 사용함으로써 실제 모델에 근접했기 때문이다. 모우드를 구할 때 요소수를 많이 취하여도 실제 운동해석에 추가되는 계산 부담은 없다. 그러나 해석에 사용된 모우드의 수와 비선형성을 구현하기 위한 요소수는 계산시간과 매우 밀접한 관련을 갖는다. 그러므로 가능하면 많은 요소를 취하여 모우드를 구하고(그렇지 않으면 그림 5에 비해 그림 4처럼 전체적으로 실제보다 변형이 작게 나타난다.), 해석에 사용할 모우드수와 기하학적 비선형성을 구현하기 위한 요소수는 계산시간과 해의 정확성을 고려하여 적절히 정하여야 한다.

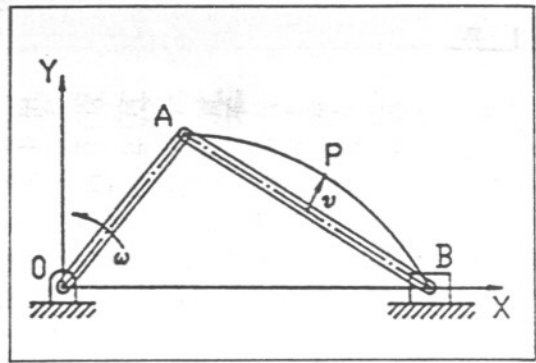


그림 3. 슬라이더 크랭크 기구

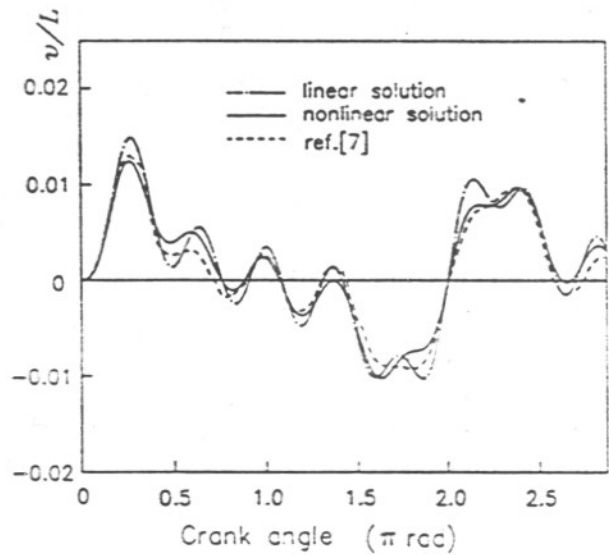


그림 4. 2개의 요소로 모우드를 구하여 해석한 선형 및 비선형 결과

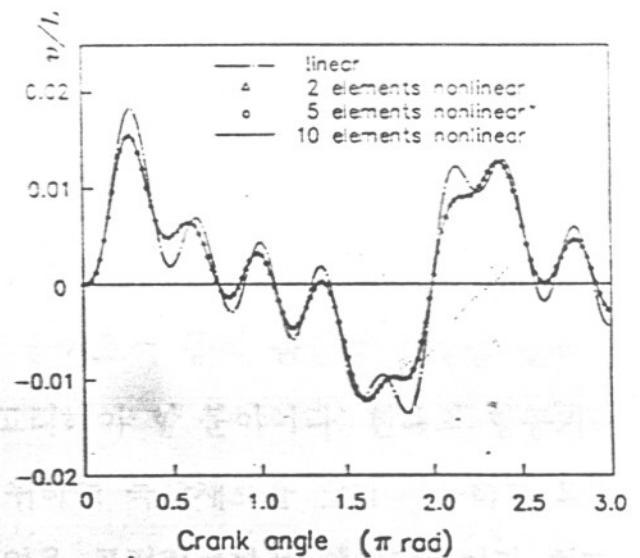


그림 5. 10개의 요소로 모우드를 구하여 해석한 결과

7. 결 론

물체의 방향을 나타내기 위해 기존의 각 좌표를 사용하지 않고 단위벡터를 이용함으로써 \sin , \cos 함수와 같은 초월함수가 포함되지 않은 다항연산만으로 이루어진 유연한 평면 다물체계의 운동방정식을 유도하였다. 본 연구에서는 2가지의 비선형성이 고려되었다. 첫째는 물체의 거대회전에 의해 관성이 변하여 생기는 비선형성으로서 비선형 질량행렬로 표현된다. 둘째는 비선형 변위-변형을 관여 때문에 생기는 비선형성으로서 비선형 강성행렬로 표현된다. 후자를 기하학적 비선형성이라 부르며, 시스템의 강성을 증가시키는 역할을 하게 된다. 수치적 예로서 슬라이더-크랭크 기구의 운동을 해석한 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 슬라이더 크랭크 기구의 해석에서 기하학적 비선형성을 고려하면 선형 해석의 결과보다 강성이 커진다.
- (2) 기하학적 비선형성을 고려하기 위한 요소수는 도우드를 구하기 위한 요소수보다 작아도 됨을 알 수 있었고 이는 계산시간 단축과 밀접한 관계를 갖는다.

참고 문헌

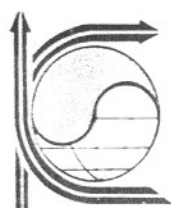
1. Song, J. O. and Haug, E. J., "Dynamic Analysis of Planar Flexible Mechanisms," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 24, pp. 359-381, 1980.
2. Agrawal, O. P. and Shabana, A. A., "Dynamic Analysis of Multibody Systems Using Component Modes," *Computers and Structures*, vol. 21, pp. 1303-1312, 1985.
3. García de Jalón, J., Unda, J., and Avello, A., "Natural Coordinates for the Computer Analysis of Three-Dimensional Multibody Systems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 56, pp. 309-327, 1986.
4. Bayo, E., García de Jalón, J., Avello, A., and Cuadrado, J., "An Efficient Computational Method for Real Time Multibody Dynamic Simulation in Fully Cartesian Coordinates," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, pp. 377-395, 1991.
5. Yoo, W. S. and Haug, E. J., "Dynamics of Articulated Structures. Part I. Theory," *J. Structural Mechanics*, Vol. 14, No.1, pp. 105-126, 1986.
6. Yoo, W. S. and Haug, E. J., "Dynamics of Articulated Structures. Part II. Computer Implementation and Applications," *J. Structural Mechanics*, Vol. 14, No.2, pp. 177-189, 1986.
7. Bark, E. M. and Shabana, A. A., "Geometrically Nonlinear Analysis of Multibody Systems," *Computers and Structures*, Vol. 23, pp. 739-751, 1986.
8. Nikravesh, P., *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall, Inc., 1988.
9. Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Co., 1971.
10. Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1968.

1993 年度

春季 學術發表會 論文抄錄集

日 時：1993年 4月 17日 (土)

場 所：空 軍 士 官 學 校



主 催

社團
法人 韓國航空宇宙學會

後 援

韓國科學技術團體總聯合會
空 軍 士 官 學 校

제 2 발표회장

좌장 : 이 인(한국과학기술원)

- 압전 폴리머 센서와 압전 세라믹 작동기를 이용한 복합재료 외팔보의 능동 진동 억제
..... 윤광준*, 이영재, 김현수(전국대학교)... 61
- 복합적층판의 저속충격 하중이력에 대한 근사적 해석
..... 최익현*, 홍창선(한국과학기술원)... 65
- 모재균열에 의해 발생하는 층간분리 해석
..... 신동익*, 홍창선(한국과학기술원)... 69

좌장 : 강치행(공군사관학교)

- 기하학적 비선형성을 갖는 유연한 평면 다물체계의 운동 해석
..... 한재홍*, 이인(한국과학기술원)... 74
- 복합재료 항공기 날개의 공탄성 현상
..... 이 인(한국과학기술원)... 79
- 탄지지대의 구조 특성 평가
..... 은성호*, 조원단, 정 발(국방과학연구소)... 83

좌장 : 김기욱(인하대학교)

- A Mongrel Singular Finite Element Model for the Bending Analysis of Thin Cracked Plates
..... 강치행(공군사관학교)... 88
- 압전재료를 이용한 복합재 평판 날개의 플러터 억제
..... 남창호*, 황재혁(한국항공대학교), 오승민(국방과학연구소)... 92