

## 적응형 Cartesian 격자기법에서 Point Gauss-Seidel 기법을 사용한 Euler 방정식 계산

Computation of the Euler Equations on the Adaptive Cartesian Grids  
Using the Point Gauss-Seidel Method

\*이진규<sup>1)</sup>, 장근식<sup>2)</sup>

J.G.Lee and K.S.Chang

An adaptive Cartesian grid method having the best elements of structured, unstructured, and Cartesian grids is developed to solve the steady two-dimensional Euler equations. The solver is based on a cell-centered finite-volume method with Roe's flux-difference splitting and implicit point Gauss-seidel time integration method. Calculations of several compressible flows are carried out to show the efficiency of the developed computer code. The results were generally in good agreements with existing data in the literature and the developed code has the good ability to capture important feature of the flows.

### 1. 서론

전산유체역학의 발달로 더욱 복잡한 형상과 현상에 대한 해석이 가능해졌지만, 여전히 격자 형성은 어렵고 많은 시간을 필요로 하는 작업이다. 복잡한 형상에 대한 격자형성 및 국부적인 격자 해상도의 조절 등에 대한 어려움을 극복하기 위한 방법중 하나로 정렬격자와 비정렬격자, Cartesian 격자의 장점을 결합시킨 Cartesian 적응격자기법(Adaptive Cartesian Grid Method)의 연구가 비점성 유동 해석을 위해서 진행되어져 왔다. 정렬격자인 것처럼, 격자가 규칙적으로 있는 영역에서는 절단(truncation)오차를 줄일 수 있으며, 비정렬격자 기법과 같이 임의의 기하학적인 형상에 대하여도 쉽게 격자를 만들 수 있고, 결과적으로 Cartesian 격자에 적응격자기법을 적용하기 때문에 기하학적 적응기법이나 해에 기반을 둔 적응기

법을 적용할 때 쉽게 격자를 분할 할 수 있는 장점을 가지고 있다. 한 가지 단점으로는 형성된 격자의 cut cell[1]이 인접격자들과 비교해서 면적 차이가 크기 때문에 유동 solver에서 다루기가 다소 까다롭다는 것이다. Clarke 등[2]과 Epstein 등은 cell의 병합과 비보존적 외삽법을 사용하여 이러한 문제를 해결하였고, Berger와 LeVeque는 국부적으로 일률적인 양질의 격자를 반복적으로 중첩시켜 놓는 'Adaptively-refined Cartesian 격자기법'을 사용하여 문제를 극복했다. 본 연구에 사용하는 격자적응기법은 형상의 굴곡과 유동특성들을 모두 적절히 다룰 수 있도록 되어있고, 앞선 연구와 같이 블록을 이용한 적응기법이 아니라, cell 단위의 적응기법[3]을 이용하여서 보다 효과적으로 해의 질을 높이도록 하였다. Cut cell에서는 국소 시간전진(local time-stepping) 기법과 함께 비정렬격자에서 사용되어지는 선형 재구성(linear reconstruction)기법을 이용하여, 작은 cell에 대해서 특별한 처리가 없게 하였다. 특히, 비정렬 cell 단위의 자료구조를 가지도록 Cartesian 격자기법을 구성했다.

본 연구에서는 Cartesian 적응격자기법을 이용하여 임의의 형상에 대한 비점성 유동을 해석할 수

- 1) 한국과학기술원 기계공학과 항공우주공학 전공 대학원 (305-701 대전시 유성구 구성동 373-1 Tel : 042-869-3783)
- 2) 한국과학기술원 기계공학과 항공우주공학 전공 교수 (305-701 대전시 유성구 구성동 373-1 Tel : 042-869-3711)

있는 프로그램을 개발하여 몇 가지 예제에 적용하였다. 공간차분화기법으로 Roe의 유량차분분리(flux-difference splitting)법을 사용한 격자 중심 유한체적법을 적용하였고, 계산시간 간격의 제한조건을 완화하기 위하여 Point Gauss-Seidel 반복계산기법[4]을 이용한 내재적 시간적분 방법을 사용하였다.

## 2. 적용 Cartesian 격자기법

Cartesian 격자기법에 이상적 자료구조인 quadtree 자료구조를 격자생성과 격자적용기법에서 사용하며, 유동해석기법에서는 비정렬격자에서 일반적으로 이용하는 linked-list 자료구조를 이용한다. List 자료구조는 유한체적법에서 가장 적합한 것으로 알려진 모서리기준(edge-based) 자료구조를 이용하여 유동장 계산의 효율성을 높여 주었다[5]. Quadtree 자료구조는 다른 tree구조와 마찬가지로, level이 0인 하나의 root cell에서부터 시작하여, 이 cell을 세분화하면, 4개의 같은 크기를 가지는 child cell이 만들어지고 level은 한 level 높은 1이 된다. 재귀적 방법으로 이들 cell들을 기본 격자가 형성될 때까지 세분화 할 수 있다. 이 같은 자료구조는 cell들을 세분화하고 병합하는 작업이 쉽게 이루어질 수 있고, 다중격자(multigrid) 기법을 적용하기에 상당히 적합한 구조로 되어있다. 격자와 관련된 프로그램은 크게 1) 이웃 cell 검색 알고리즘과 2) 임의의 형상 데이터와 격자사이에서 중첩관계를 계산하는 clipping 알고리즘[6], 3) cell들을 분류하는 알고리즘, 4) 적용 격자생성 알고리즘으로 구성되어있다. 적용격자생성 알고리즘은 기본격자 생성과정과 cut cell 주위의 cell들을 세분화시켜주는 형상적용화 과정, 유동해석으로 얻어진 값들을 이용한 조밀화 과정, 최종적으로 얻어진 격자에서 자료구조를 손상시키거나 복잡하게 하는 요소를 제거해주는 유연화(smoothing) 과정을 포함하고 있다.

본 연구에서는 효율적인 적용기법 기준으로 속도 회전(curl)과 속도발산(divergence)을 함께 사용하여 주었다[3,5]. 엄밀히 말하면, 속도회전과 속도발산은 각각 전단 층(shear layer)과 충격파를 인지하기 위해서 사용한다. 각 cell에 대해서 속도의 회전과 발산이 가중치를 가진 형태로 계산되어진다.

즉,

$$\tau_{c_i} = |\nabla \times U| l_i^T, \quad \tau_{d_i} = |\nabla \cdot U| l_i^T \quad (1)$$

여기서,  $l_i$ 는 cell 길이이며, 회전과 발산 효과를 완전히 분리시키기 위해서 사용한다. 이들 형태로  $n$ 개의 cell에 대해서 회전과 발산을 구하면, 0에 대한 표준편차는 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \tau_{c_i}^2}{n}}, \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \tau_{d_i}^2}{n}} \quad (2)$$

만약 다음 두 가지 가능한 조건 중에 하나가 유효하다면, 세분화되거나 병합 되는 cell로 표시된다.

- 1) 만약  $\tau_{c_i} > \sigma_c$ 이거나  $\tau_{d_i} > \sigma_d$ 이면, 세분화
  - 2) 만약  $\tau_{c_i} < \frac{1}{10} \sigma_c$ 이고,  $\tau_{d_i} < \frac{1}{10} \sigma_d$ 이면, 병합
- 여기서, 이중 하나의 특성이 다른 특성보다 더 중요한 경우는 적용기법을 적용하기 위한 가중치를 바꾸어 주면 된다.

## 3. 수치기법

### 3.1 공간이산화

본 연구에서 사용하는 유량(flux) 계산식은 이상기체에 대한 2차원 압축성 Euler 방정식을 이용한다. 유한체적법 2차원 Euler 방정식은

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{V} \sum_{faces} (Fdy - Gdx) \quad (3)$$

여기서,  $V$ 는 면적이고,  $\Delta x$ 와  $\Delta y$ 는 제어체적의 가장자리를 따라 변하는  $x$ ,  $y$  값이다. 보존현 변수  $Q$ 와 유량 벡터  $F$ ,  $G$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$Q^T = (\rho, \rho u, \rho v, e)$$

$$F^T = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uh) \quad (4)$$

$$G^T = (\rho v, \rho vu, \rho v^2 + p, \rho vh)$$

여기서,  $\rho$ 는 밀도,  $u$ ,  $v$ 는 각각  $x$ ,  $y$ 방향의 속도,  $e$ 와  $h = (e + p)/\rho$ 는 각각 단위체적당의 총에너지와 총엔탈피를 나타낸다. 면의 길이와 수직, 수평 속도는

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (5)$$

$$u_n = \frac{u\Delta y - v\Delta x}{\Delta s}, \quad u_t = \frac{u\Delta x + v\Delta y}{\Delta s}$$

이고, 면을 통과하는 유량은

$$(F\Delta y - G\Delta x) = \begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n u + p \frac{\Delta y}{\Delta s} \\ \rho u_n v - p \frac{\Delta x}{\Delta s} \\ \rho u_n h \end{pmatrix} \Delta s \equiv \Phi \Delta s \quad (6)$$

이며,  $\Phi$ 는 가장자리 인접 cell의 유동변수를 재구성 한 값을 이용하여 유량을 구하는 관계식이다. 각 cell에 대해서, 가장자리를 통하는 유량들을 모두 합하면 그 cell에서의 잔류치(residual)를 구할 수 있다. 즉,

$$R(Q) = - \sum_{faces} \Phi \Delta s \quad (7)$$

본 연구에서는 유량을 계산하기 위해서 Riemann 문제의 근사해를 이용하는 Roe의 유량차분분할법(Flux-Difference Splitting)을 사용한다. 이 때, 유량은 가장자리의 우측과 좌측 cell에서 가장자리 중심으로 재구성 된 값들의 함수이므로  $\Phi$ 는

$$\Phi(Q_L, Q_R) = \frac{1}{2} [\Phi(Q_L) + \Phi(Q_R)] - \frac{1}{2} \sum_{faces} |\hat{a}^{(k)}|^* \Delta V_k \hat{R}_k \quad (8)$$

이며, 유량 차분항은 scheme을 안정시키는 upwind 특성을 가지고 있다[3].

팽창 충격파를 막기 위해서, 엔트로피 보정을 해주어야 한다. 엔트로피를 지배하는 항인  $|\hat{a}^{(k)}|$  중에서 두 acoustic 파를 매끄럽게 해주는  $|\hat{a}^{(k)}|^*$ 으로 바꾸어준다[3]. 즉, 이들 두 파에 대해서 아래와 같이 바꾸어 준다.

$$|\hat{a}^{(k)}|^* = \begin{cases} |\hat{a}^{(k)}| & |\hat{a}^{(k)}| \geq \frac{1}{2} \delta a^{(k)} \\ \frac{(\hat{a}^{(k)})^2}{\delta a^{(k)}} + \frac{1}{4} \delta a^{(k)} & |\hat{a}^{(k)}| < \frac{1}{2} \delta a^{(k)} \end{cases} \quad (9)$$

$$\delta a^{(k)} = \max(4\Delta a^{(k)}, 0), \Delta a^{(k)} = a_R^{(k)} - a_L^{(k)}$$

### 3.2 고차의 공간차분화

고차의 공간 정확도를 구현하기 위해서 물리변수를 외삽시키는 기법인 MUSCL 방식을 사용한다. 본 연구에서는 원시변수를 이용하여 cell의 경계에 외삽하는 방식으로 이루어 졌으며, 불연속 전후의 값을 모두 사용하여 고차정확도의 값을 계산하기 때문에 생기는 해의 진동을 막기 위해서 TVD 기법에서와 비슷한 제한자(limiter)를 사용하여 강제적으로 해의 기울기를 제한시켜 해의 단조성을 부여하였다. Barth-Jersperon 제한자와

Venkatkrishinan 제한자를 선택적으로 사용할 수 있게 하였으며, 해의 수렴을 향상시키기 위해서 잔류치가 일정 수렴조건 이하가 되면, 제한자  $\phi$ 를 다음식에 의해서 조절을 해준다[7].

$$\phi^n = \min(\phi^{n-1}, \phi^n) \quad (10)$$

해를 cell 경계 중심으로 재구성하여 고차정확도로 플럭스를 계산하기 위한 구배 계산을 위해서는 격자의 질이 나쁜 경우나 혼합격자에서도 좋은 결과를 보인다고 알려진 least-square 방법[3]을 이용하였다.

### 3.3 경계조건

모든 경계조건은 양성적으로 처리했다. 원방 경계에서는 국부적으로 1차원 유동으로 가정하여 Riemann 불변치에 근거한 특성형태의 경계조건을 사용하고, 이 때 사용된 불변치와 경계면에 수직인 속도와 음속은 다음과 같다.

$$R^\pm = u_n \pm \frac{2a}{\gamma - 1} \quad (11)$$

이 때, 유입류에 대한 불변치  $R^-$ 는 자유류에 의해서 결정되며, 유출류에 대한 불변치  $R^+$ 은 유동의 내부로부터 계산된다. 계산된 불변치는 국부속도성분과 음속을 구하는 과정에 이용된다.

$$u_n = \frac{1}{2}(R^+ + R^-) \quad (12)$$

$$a = \frac{\gamma - 1}{4}(R^+ - R^-)$$

벽면 경계조건은 미끄럼 경계조건을 사용하였다.

### 4. 시간적분법

Implicit method로 시간 적분을 하기 위해서 Euler 후방차분법을 적용 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_i \frac{\Delta Q_i^n}{\Delta t} = R_i^{n+1} \quad (13)$$

식(13)의 우변을 시간에 대해 Taylor 전개로 선형화 시키고 전개 해서 쓰면,

$$V_i \frac{\Delta Q_i^n}{\Delta t} = R_i^n + \frac{\partial R_i^n}{\partial Q_i} \Delta Q_i + \frac{\partial R_i^n}{\partial Q_j} \Delta Q_j \quad (14)$$

이다. 여기서,  $\Delta Q_i^n = Q_i^{n+1} - Q_i^n$ 이고,  $R$ 은 잔류치 이다.

위 식에서  $\partial R_i^n / \partial Q_i$ 와  $\partial R_i^n / \partial Q_j$ 는 각각 유량 자코비안 행렬이 되고, 이를 행렬식으로 다시 써 보면,

$$[J]\{Q\} = \{R\}^n \quad (15)$$

이다. 여기서,  $[J]$ 는 유량 자코비안 행렬이다. 이 유량 자코비안 행렬은 (number of edge) × (number of eqation) × (number of equation)의 크기를 갖는 큰 규모의 성긴 행렬(sparse matrix)이 된다. 일반적으로 큰 성긴 행렬식을 풀기 위한 해법으로 직접적인 방법(direct method)은 행렬의 크기가 너무 크기 때문에 적용하기 힘들 뿐만 아니라, 메모리 문제와 계산시간의 비효율성으로 인해 적용할 수 없는 형편이다. 한편, 다른 방법으로 이 행렬식을 해결할 수 있는 것으로는 크게 두가지가 있다.

우선, 행렬  $[J]$ 를 upper와 diagonal, lower로 나누어서 계산하게 되는 AF(Approximate Factorization) 방법이 있고, 식15)를 GMRES나 Gauss-Seidel과 같이 여러 번의 내부 반복을 통해서 해를 얻게 되는 반복법(iterative method)이 있다. AF 방법은 Jameson과 Yoon이 제안한 LU-SGS를 비정렬 격자에 맞게 수정한 것으로 여러 연구자들에 의해 계산된 예[8]가 있다. AF 방법의 장점은 유량 자코비안 행렬의 계산과 저장에서 컴퓨터의 메모리를 크게 절약할 수 있다는 것이지만, 반복법에 비해서 수렴성이 떨어져서 전체 계산 시간이 길어지는 단점이 있다는 것이다. 본 연구에서는 현재 비정렬 격자에서 가장 많이 쓰는 시간적분법 중 하나인 Gauss-Seidel 방법을 사용하여 시간적분을 수행한다[4].

식15)의 유량 자코비안 행렬을 대각행렬과 비대각행렬로 분할하여 써 보면,

$$[J] = [D] + [O] \quad (16)$$

이다. 식16)을 식15)에 대입하여 정리하면,

$$[D]\{\Delta Q\}^i = [\{R\}^n - [O]^n\{\Delta Q\}^j] \quad (17)$$

이고, 대각행렬  $[D]$ 은  $\frac{V_i}{\Delta t} I + \sum_j^{N_{face}} \frac{\partial F_j}{\partial Q_i}$ , 비

대각행렬  $[O]$ 은  $\sum_j^{N_{face}} \frac{\partial F_j}{\partial Q_k}$ 으로 나타난다.

본 연구에서는 유량 자코비안을 다음과 같은 근사 유량 자코비안을 사용하여 계산하였다.

$$\frac{\partial F_j}{\partial Q_i} = A^+ = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial F(Q_L)}{\partial Q_L} + |\hat{A}| \right] \quad (18)$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial Q_k} = A^- = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial F(Q_R)}{\partial Q_R} - |\hat{A}| \right]$$

정상 유동 문제의 경우 중간 단계의 해는 필요하지 않으므로 수렴성을 좋게 하기 위해 각 격자에서 각각의 최적 시간간격으로 시간 진행을 할 수 있는 국소 시간 전진법(local time stepping)을 사용하고, SER(Switched evolution relaxation)법을 이용하여 정상상태에 접근해 감에 따라 CFL수를 증가시켜주었다[7].

$$CFL^{n+1} = CFL^0 \left( \frac{\|R(Q^0)\|}{\|R(Q^n)\|} \right)^p \quad (19)$$

여기서 초기  $CFL^0$ 은 1~5의 값과  $p$ 는 0.5~1.5의 값을 사용한다.

## 5. 수치계산 및 결과

본 연구에서 개발된 해법의 정확성 및 수렴성과 강건성을 평가하기 위하여 본 해법을 몇 가지 기본 압축성 유동문제에 적용하였다. 계산에 사용된

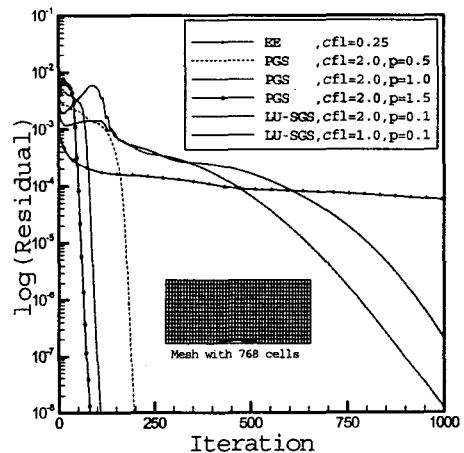


Fig 1. 4% Bump convergence history based on residual calculations using the mesh with 768 cells & level 0 mesh : EE(Euler Explit) , PGS(Point Gauss-Seidel), LU-SGS, p is the parameter using in SER method

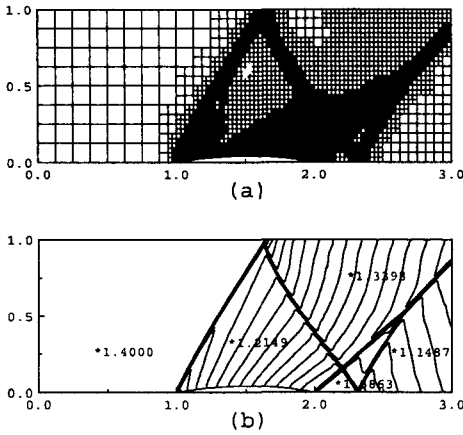


Fig. 2 4% bump Mach number contours : 7,792 cells, level 4 mesh.

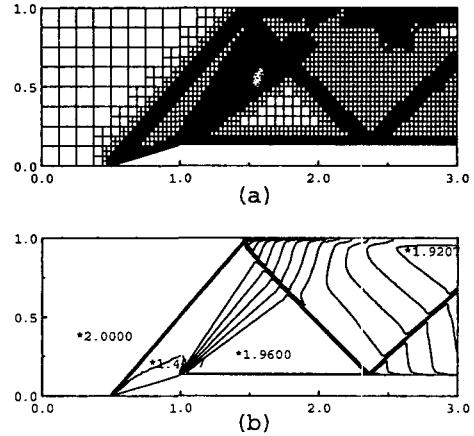


Fig. 4 Fifteen degree wedge Mach number contours : 9,622 cells, level 4 mesh.

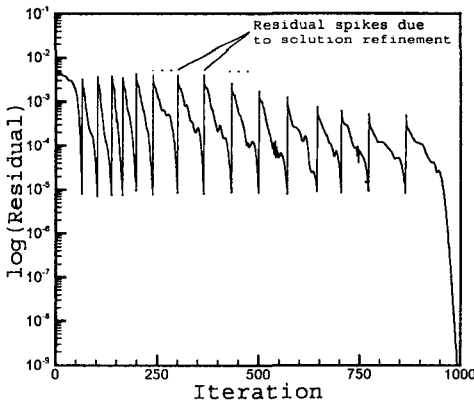


Fig. 3 Representative residual convergence history

컴퓨터는 Intel사에서 제공하는 PentiumIII(800 Mhz) CPU가 탑재된 개인용 컴퓨터이고, cygwin에서 제공하는 gcc 컴파일러를 이용하여 수행하였으며 모든 실수형 변수는 8byte형을 사용하였다. 우선 개발된 Point Gauss-Seidel(PGS) 반복법의 수렴성을 알아보기 위해서, 4% 범퍼의 채널 내부의 마하수 1.4인 초음속 유동에 대해서, 768개의 cell을 가지는 격자를 이용하였다. 비교한 시간전진기법은 Euler Explicit(EE) 기법과 LU-SGS 내재적 기법이다. Fig. 1에서 EE는 안정성문제로 CFL수를 0.25로 주었고, LU-SGS 기법은 초기 CFL수를 각각 1과 2, SER 기법에

사용되는 인자  $\rho$ 를 0.1로 두었고, PGS는 초기 CFL수를 2,  $\rho$ 는 각각 0.5, 1.0, 1.5로 주었다. 수렴 동향을 보면, PGS가 다른 시간적분법보다 최소 5배 이상의 차이를 보이고 있어, 본 격자기법에서 현저하게 수렴률이 향상되었음을 알 수 있으며,  $\rho$ 값은 안정성에 문제가 없으면 0.5~1.5 사이의 값 중 큰 값을 주는 것이 좋겠다.

Fig.2는 초기격자로  $24 \times 8$ 의 Cartesian 격자를 기본격자로 사용하였고, level 4까지 격자적응기법을 수행한 결과이다. 범퍼 앞부분에서 생긴 경사충격파가 뒷면에 부딪혀서 반사충격파가 생성되고, 이것이 범퍼 뒷부분에서 생긴 충격파들과의 간섭을 정확하게 예측하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 3는 잔류치가  $1.e-5$  이하일 때 격자적응기법을 수행하게 하였으며, 15번의 적응과정을 수행하는 동안의 수렴 곡선을 나타낸다

Fig.4는  $15^\circ$  썸기를 가진 채널 내부의 마하수 2의 초음속 유동에 대해서 각각 압축코너와 팽창코너에서 발생하는 경사충격파와 팽창팬을 날카롭게 적응격자로서 구현할 수 있음을 볼 수가 있다. 또한 압축코너에서 생긴 경사충격파가 뒷면에 부딪혀서 mach stem을 만들며, mach stem 뒤로 전단층이 뚜렷하게 잡히고 있음을 격자의 밀집도와 마하수 contour로부터 알 수가 있다.

Fig.4-5는 NACA0012 에어포일을  $\alpha=0^\circ$ , 마하

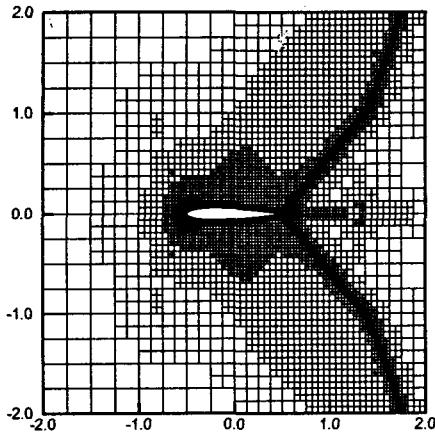


Fig. 5 NACA0012. mesh : 7,642 cells, level 4 mesh.

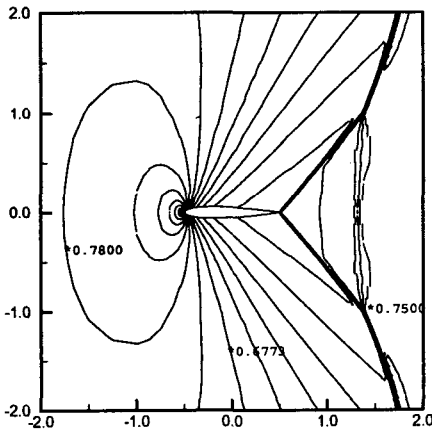


Fig. 6 NACA0012. pressure line contours :  $M_\infty = 0.95, \alpha = 0^\circ$

수 0.95 일 때의 유동조건에서 결과이며, 에어포일 후연의 와류생성 영역에서 수직충격파가 잡히고 있음을 볼 수 있다. 이 수직충격파는 후연에서 나오는 경사 충격파와 연관되어 있기 때문에, 경사충격파를 정확하게 잡는 것이 중요하며, 그렇게 하기 위해서는 격자를 후연부에 조밀하게 세분화 시켜주어야 한다. Fig. 5에서 후연부의 경사 충격파 구역에서 충분한 격자의 세분화가 이루어

지고 있음을 볼 수 있다.

### 6. 결론

정렬격자와 비정렬격자의 장점들을 모두 가지고 있는 적응형 Cartesian 격자기법을 개발하였으며, 개발된 코드를 이용하여서 몇 가지 기본 압축성 문제에 적용하여 계산하였다. 계산 결과는 임의의 형상에 대해서 격자생성을 위한 인위적인 외부 개입 없이 자동으로 격자를 생성시켜 줄 수 있었으며, 압축성 유동의 중요한 현상인 충격파와 팽창파를 정확하게 잡아낼 수 있음을 보여주었다. Point Gauss-Seidel 반복계산기법을 사용한 내재적 시간적분법으로 수렴성을 향상시켜 빠른 시간안에 효율적으로 해를 얻어 낼 수가 있었다. 이 결과들은 비점성유동의 해석에 있어서 Cartesian 적응 격자기법이 효율적인 해법임을 시사한다.

현재, 자료구조를 손상시키는 복잡한 형상에 대해서도 자동 격자를 생성시킬 수 있는 강건한 격자형성 프로그램을 개발 중이며, 큰 Reynolds 수를 가지는 압축성유동을 해석하기 위해서 코드를 확장중이다.

### 참고문헌

- [1] G. Yang, D.M. Causon, and D.M. Ingram, AIAA J., Vol. 37, No. 8 (1999), p.905-911.
- [2] D.K. Clarke, M.D. Salas, and H.A. Hassan, AIAA J., Vol. 24 (1986).
- [3] D. De Zeeuw, Ph.D. Thesis, Aerospace Engineering Department, The University of Michigan (1993).
- [4] W.K. Anderson and D.L. Bonhaus, Computers & Fluids, Vol. 23, No. 1 (1994).
- [5] Z.J. Wang, Computers & Fluids, Vol. 27, No. 4 (1998), p.529-549.
- [6] Clippoly, [http://www.ph.tn.tudelft.nl/People/klamer/clippoly\\_entry.html](http://www.ph.tn.tudelft.nl/People/klamer/clippoly_entry.html)
- [7] M. Delanaye, Ph.D. Thesis, Université De Liège (1996).
- [8] D. Sharov and K. Nakahashi, AIAA Paper 97-2012 (1997).