

응력장에서 탄소성 구성방정식의 개선된 적분방법

조상순¹ · 허 훈[#]

Modified Integration Method for Elasto-plastic Constitutive Relations in the Stress Space

S. S. Cho, H. Huh

Abstract

An analysis of accuracy of proposed algorithms for the integration of elasto-plastic constitutive relations is carried out in this paper. The well-known Backward-Euler return method is known to be unconditionally stable, but it is first-order accurate. And this can not consider the convective stress rates on the yield surface during the plastic deformation and can be a limitation in many cases of practical interest. The proposed algorithm is integrated analytically using integration by part and chain rule and then is applied to the 2-stage Lobatto IIIA with second-order accuracy. It has advantage that is able to consider the convective stress rates on the yield surface in the stress space. Finally, the presented isoerror maps demonstrate the better accurate properties of the proposed algorithm than those of the Backward-Euler return method irrespective of given strain increments.

Key Words : Elasto-Plasticity, Backward-Euler return method, 2-stage Lobatto IIIA, Isoerror maps, Stress space

1. 서 론

유한요소법을 이용한 탄소성문제는 각 단계의 응력증분을 계산하기 위하여 비선형 구성 방정식을 수치적분한다. 구성방정식의 적분은 재료의 변형중에 발생하는 소성일이 최대화되도록 응력 증분을 계산하여야 하며, 계산된 응력값은 항복면내에 존재하여야 되는 제한조건을 가지고 있다. 이와 같은 탄소성문제의 적분방법은 비선형성과 제한조건 때문에 정해를 구하기 어려워 많은 연구자들에 의해 경제적이고 정확한 수치 적분방법이 연구되었다.

구성방정식의 적분방법에는 초기 항복면의 법선 벡터방향으로 소성변형률 증분을 취하는 전방 오일러 방법 (Forward-Euler method), 초기 항복면의 법선벡터와 모든 변형률증분을 탄성이라 가정

한 시도응력(Trial stress)에서 법선벡터의 평균값을 이용하는 일반화중점 방법(Generalized midpoint method), 그리고 시도 응력으로부터 항복면으로 수직으로 회귀하는 반경회귀법(Radial return method)등이 있다.⁽¹⁾

전방오일러 방법은 외연적 적분방법으로서 축차를 필요로 하지 않는 장점이 있지만, 항복조건식을 만족하지 못하는 단점을 가지고 있다. 일반화중점 방법은 Rice와 Tracy에 의해 제안되었고 Kreig와 Key에 의해 일반화되었다. 그리고Oriz와 Popov는 일반화중점 방법은 작은 변형률인 경우 평균 법선벡터가 가장 정확하다는 것을 보였다.⁽²⁾ 구성방정식의 수치적분방법에서 가장 널리 사용되는 반경회귀법은 Wilkins에 의해 처음으로 제안되었다. 이 방법 변형률 증분량을 모두 탄성으로 가정한 시도 응력이 현재의 항복면을 벗어나면, 항복조건을 만족하기 위해 시도응력으로부터 소성변형률만큼 반경회귀하여 보정하게 되며, 시도 응력과 항복면은 기하학적으로 수직을 이룬다. 이

1. 한국과학기술원 기계공학과

교신저자: 한국과학기술원 기계공학과, hhuh@kaist.ac.kr

방법은 후방오일러 회귀방법(Backward-Euler Return method)의 특별한 형태로서 뉴턴-랩슨 방법(Newton-Raphson method)으로 이차의 수렴성이 보장되는 장점을 가지고 있으며, 또한 탄성영역에서 소성영역으로 변형될 경우 현재의 항복면을 고려할 필요가 없는 장점을 가지고 있다.⁽¹⁾

그러나 위의 방법들은 각 적분구간의 초기 또는 마지막 순간의 정보만을 가지고 계산하기 때문에 중간단계의 항복면 및 소성변형 이력을 고려할 수 없는 단점을 가지고 있다. 최근 Buttner 등은 내연적 s-단계 룬지-쿠타방법(Implicit s-stage Runge-Kutta method)을 이용하여 중간 이력을 고려할 수 있는 적분방법을 소개하였다. 그러나 이 방법은 FE code를 작성하기에 매우 어려운 단점이 있으며, 탄성영역에서 소성영역으로 변형될 경우 현재의 항복면을 고려하기 위한 증분의 선택에 매우 주의할 필요가 있는 것으로 알려져 있다.⁽³⁾

본 논문에서는 평면 변형률 상태를 가정한 탄 소성변형중의 항복면 위에서 소성변형의 이력을 고려할 수 있는 새로운 적분방법을 제안하였다. 이는 후방오일러 회귀방법과 마찬가지로 시도 응력과 축차 해와의 반복계산과정으로 항복조건식을 만족시키지만, 반복회귀법과 다르게 시도 응력과 항복면상의 해는 기하학적으로 수직을 이루지 않는다. 또한 내연적 룬지-쿠타 방법(Implicit Runge-Kutta method)의 2-stage Lobatto IIIA를 적용하여 적분을 수행하였으며, Isoerror maps을 이용하여 해의 정확도를 반경회귀법의 정확도와 비교하였다.

2. 수 식 화

2.1 후방오일러 회귀방법

등방성 탄소성에 대한 항복함수는 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(\sigma'_{ij}, \varepsilon^p) = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} - g(\varepsilon^p) = \sigma_e - \sigma_0 = 0 \quad (1)$$

이 식에서 σ_e 는 유효응력이며 σ_0 는 항복응력, ε^p 는 유효 소성 변형률이다. 그리고 다음 식(2)와 같이 Prandtl-Reuss 유동법칙을 따른다.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \dot{\lambda} \mathbf{a} = \dot{\lambda} \frac{\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}}{2\sigma_e} \quad (2)$$

$$= \left(\dot{\varepsilon}_{px}, \dot{\varepsilon}_{py}, \dot{\varepsilon}_{pz}, \dot{\varepsilon}_{pxy}, \dot{\varepsilon}_{pyz}, \dot{\varepsilon}_{pxz} \right)^T$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 벡터 \mathbf{a} 는 항복면에 수직이며 $\dot{\lambda}$ 는 양의 값으로 소성변형률 속도 승수이다. 이 값이 음수가 되면 항복면으로부터 해중이 되는 것을 의미한다. 따라서 이 경우 영의 값을 가진다. 식(3)의 \mathbf{P} 는 원래의 응력으로부터 편차응력(Deviatoric Stress)으로의 사상에 관련된 행렬이다. 그리고 변형률 변화에 따른 응력의 변화는 식(4)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{a}) \quad (4)$$

여기서 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 는 총 변형률 속도를 의미한다.

소성 유동이 일어날 경우, 응력은 항복면 위에 위치하게 되므로 등방 변형정화를 고려하면 식(5)와 같은 식을 쓸 수 있다.

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0(\varepsilon^p)}{\partial \varepsilon^p} \dot{\varepsilon}^p = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad (5)$$

여기서 H 은 소성에서의 항복선도의 기울기를 의미한다.

소성유동에 의한 $\dot{\lambda}$ 의 값을 구하기 위하여 식(5)를 식(4)에 대입하여 정리하면 다음과 같 식(6)을 얻을 수 있다.

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a} + H} \quad (6)$$

따라서 응력변화율은 식(7)과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{C}}{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a} + H} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (7)$$

또한 식(7)을 변형이 일어나는 시간에 대하여 적분하면 식(8)과 같이 된다. 여기서 $\boldsymbol{\sigma}^T$ 는 총 변형률을 탄성으로 가정한 시도 응력을 의미한다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C} \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \mathbf{a} d\tau = \boldsymbol{\sigma}^T - \mathbf{C} \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \mathbf{a} d\tau \quad (8)$$

위의 식(8)을 수치적으로 적분하기 위하여 Radau IIA 를 적용하면 식(9)와 같이 반경회귀법의 결과를 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) = \boldsymbol{\sigma}(t) + \Delta \boldsymbol{\sigma}^T - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a} \quad (9)$$

여기서 Radua IIA 를 사용하였기 때문에 \mathbf{a} 는 시간 $\tau = t + \Delta t$ 에서의 항복면의 법선벡터를 의미한다. 따라서 Radua IIA 를 이용하는 반경회귀법은 시간 $t \leq \tau < t + \Delta t$ 에서의 항복면을 고려하지 않아도 되는 장점을 가지고 있다.

그리고 위의 식(5)와 식(9)에 축차방법을 적용하기 위하여 다음과 같이 Taylor 전개를 통한 뉴튼-랩슨(Newton-Raphson)방법을 적용하면 수렴된 해를 구할 수 있다.

$$d\lambda_{i+1} = \frac{f_i - \mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_i}{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a} + H} \quad (10)$$

$$d\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = -\mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{r}_i - d\lambda_{i+1} \mathbf{C} \mathbf{a}) \quad (11)$$

$$\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\sigma}_i - (\boldsymbol{\sigma}^T - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}) \quad (12)$$

$$\mathbf{Q} = \left(\mathbf{I} + \Delta \lambda_i \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (13)$$

2.2 개선된 적분방법

식(9)는 Radau IIA 를 적용한 것으로서 1 차의 정확성을 갖는다. 즉 소성변형률과 법선 벡터 \mathbf{a} 의 급인 $\dot{\lambda} \mathbf{a}$ 는 시간 $t \leq \tau < t + \Delta t$ 동안에 선형적으로 변화하는 경우에만 정해를 가질 수 있다.

그러나 탄소성 변형은 변형 중에 비선형성을 가지므로 식(9)는 오차를 포함할 수 밖에 없으며, 소성변형과 항복면의 변화 이력을 고려할 수 없는 단점을 가지고 있다.

따라서 1 차 이상의 정확성을 갖기 위하여 식(8)에 부분적분(Integration by Part)과 연쇄법칙(Chain rule)을 적용하여 식(14)와 같이 해석적으로 적분하였다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T - \mathbf{C} \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \mathbf{a} d\tau \\ &= \boldsymbol{\sigma}^T - \mathbf{C} \left(\Delta \lambda \mathbf{a} - \int_t^{t+\Delta t} \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} d\tau \right) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^T - \mathbf{C} \left(\Delta \lambda \mathbf{a} - \int_t^{t+\Delta t} \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\tau \right) \end{aligned} \quad (14)$$

또한 위의 식(14)의 마지막 적분항은 시간 $\tau = t$ 에서 $\Delta \lambda = 0$ 이기 때문에 2-stage Lobatto IIIA를 적용하여 수치적으로 적분하면 모든 변수는 시간 $\tau = t + \Delta t$ 에서의 값을 의미한다.⁽⁴⁾ 따라서 식(9)와 같이 시간 $t \leq \tau < t + \Delta t$ 에서의 항복면을 고려하지 않아도 되는 장점을 갖는다. 따라서 식(14)에 2-stage Lobatto IIIA를 적용하고 식(7)을 대입하면 아래 식(15)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) &= \boldsymbol{\sigma}(t) + \Delta \boldsymbol{\sigma}^T - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta \lambda \mathbf{C} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{C}}{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a} + H} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

2-stage Lobatto IIIA 는 Radau IIA 와 달리 2 차의 정확성을 갖기 때문에 식(9)보다 정확한 결과를 얻을 수 있으며, 식(15)의 마지막항은 항복면의 법선벡터의 응력에 대한 미분을 이용하기 때문에 항복면에서 응력의 변화를 고려할 수 있는 응력의 대류속도(Convective velocity)항이 된다. 따라서 변형률 증분동안의 변형이력을 고려할 수 있는 장점을 가지고 있다.

그리고 식(10)~(13)과 마찬가지로 식(15)에 뉴튼-랩슨 방법을 적용하여 수렴된 해를 구할 수 있다.

3. 결 과

3.1 정확성 평가: Isoerror Map

Krieg와 Krieg는 탄소성문제에 관한 적분 알고리즘의 정확성을 평가하기 위하여 Isoerror Map을 제안하였다. Fig.1에서 A,B와 C는 각각 단축 응력(Uniaxial stress), 2축 응력(Biaxial stress) 그리고 순전단 응력(Pure shear stress)을 나타낸다. Isoerror map은 위의 항복면의 점들에 대해 변형률 증분을 변화시켜 각각의 오차를 계산하여 만든다. 오차는 아래 식(16)과 같이 정해와 계산된 응력의 상대제곱평균제곱근(relative root mean square)을 계산하

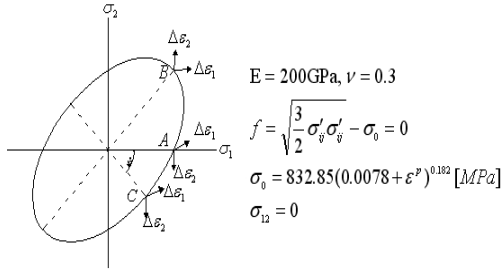


Fig.1 Points for isoerror maps and material properties.

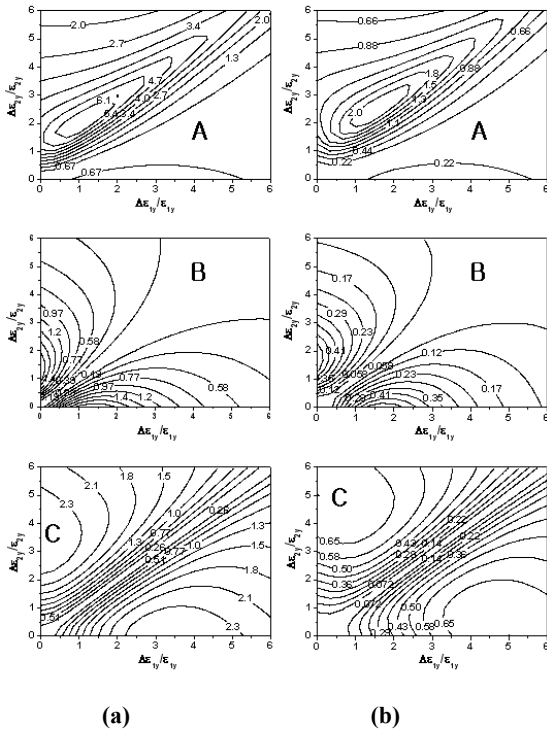


Fig. 2 Isoerror maps corresponding to point A,B and C on the yield surface: (a)Backward-Euler return method; (b)Modified return method

여 구한다.

$$\delta = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^* : \boldsymbol{\sigma}^*}} \times 100 \quad (16)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 제안된 알고리즘에 의해 계산된 응

력을 나타내며, $\boldsymbol{\sigma}^*$ 는 같은 변형률 증분에 대한 정해를 의미한다. 정해는 각 변형률 증분을 1000 개의 부분증분(subincrement)으로 계산하였다.^{(5),(6)}

Isoerror map 을 그리기 위한 예제로서 Fig. 1 의 Swift 물성모델을 사용하였으며, 평면변형률로 가정하여 해석하였다. Fig. 2(a)는 후방오일러 방법의 결과로서 점 A,B 와 C 에서 각각 6.7, 1.9, 2.6 의 최대상대오차가 발생하였다. 반면 본 논문에서 제안한 개선된 방법의 최대 상대오차는 각각 2.2, 0.58, 0.72 으로서 세 점에서 약 70%개선된 것을 확인하였다.

4. 결론

본 논문에서는 평면 변형률 상태에서 탄소성변형중에 항복면위에서 소성변형의 이력을 고려할 수 있는 새로운 적분방법을 제안하였다. 개선된 적분 방법은 소성변형율의 시간적분을 해석적으로 수행하여 소성변형의 이력을 고려할 수 있도록 하였고, 내연적 룬지-쿠타방법의 2-stage Lobatto IIIA를 적용하여 정확도를 개선하였다.

참고 문헌

- [1] M. A. Crisfield, 1991, Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 1, John Wiley & Sons, England.
- [2] M. Oriz, E. P. Popov, 1985, Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 21, pp. 1561~1576.
- [3] J. Büttner, B. Simeon, 2002, Runge-Kutta methods in elastoplasticity, Appl. Numer. Math., Vol. 41, pp.443~458
- [4] J. D. Lambert, 1991, Numerical methods for ordinary differential systems, John Wiley & Sons, England.
- [5] J. C. Simo, T. J. R. Hughes, 1998, Computational Inelasticity, Springer, New York.
- [6] J. C. Simo, R. L. Taylor, 1986, A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 22, pp. 649~670.

