

고른 필터를 이용한 인공위성의 자세 추정

Spacecraft Attitude Estimation by Unscented Filtering

이 현 재*, 최 윤 혁, 방 효 충, 박 종 오
(Henzeh Leeghim, Yoonhyuk Choi, Hyochoong Bang, and Jong-Oh Park)

Abstract : Spacecraft attitude estimation using the nonlinear unscented filter is addressed to fully utilize capabilities of the unscented transformation. To release significant computational load, an efficient technique is proposed by reasonably removing correlation between random variables. This modification introduces considerable reduction of sigma points and computational burden in matrix square-root calculation for most nonlinear systems. Unscented filter technique makes use of a set of sample points to predict mean and covariance. The general QUEST(QUaternion ESTimator) algorithm preserves explicitly the quaternion normalization, whereas extended Kalman filter(EKF) implicitly obeys the constraint. For spacecraft attitude estimation based on quaternion, an approach to computing quaternion means from sampled quaternions with guarantee of the quaternion norm constraint is introduced applying a constrained optimization technique. Finally, the performance of the new approach is demonstrated using a star tracker and rate-gyro measurements.

Keywords : spacecraft attitude estimation, extended Kalman filter, unscented filter, quaternion constraint

I. 서론

인공위성의 자세추정 문제는 심우주 항법 및 다양한 임무를 수행하기 위한 가장 기본적이면서도 핵심적인 부분이다. 이와 같은 자세결정 알고리즘은 인공위성 뿐만 아니라 다양한 자율 항법 로봇에 반드시 필요한 기술이다. 자세를 표현하기 위한 방법 중, 쿼터니언(Quaternion)은 특이점이 존재하지 않는다는 이유로 과거로부터 상당한 주목을 받고 있고, 현재까지 많이 사용되고 있다[1]. 일반적으로 3축의 자세를 표현하기 위해서는 2개 이상의 자세측정 벡터가 필요하다. 이와 같은 데이터를 적용하여, 확장 칼만 필터(EKF, Extended Kalman Filter) 또는 QUEST(QUaternion ESTimator) 등의 기법을 사용하여 자세를 추정하게 된다[2-4]. 일반적으로 칼만 필터(Kalman filter)는 다양한 측정값을 사용할 수 있고 동력학적 모델을 사용한다. 그러나, 초기값의 오차가 큰 경우에 이들의 선형화 과정 때문에 필터가 발산할 수 있다는 단점이 있으며, 측정갱신(measurement update)과정에서 쿼터니언의 정규화 구속조건을 만족하지 못한다는 단점을 가지고 있다. QUEST 알고리즘은 정규화 구속조건을 명시적으로 만족한다는 장점이 있는 반면에, 자세측정벡터 외에는 다양한 측정값을 사용할 수 없다는 것과 자세 외 다른 변수를 추정할 수 없다는 단점이 있다[5].

앞서 설명한 인공위성의 자세추정에 대한 확장 칼만필터의 단점을 보완하기 위한 다양한 방법이 제시되었다. 그 중 시스템의 비선형성을 극복하기 위한 하나의 방법으로 고른 필터(unscented filter)를 이용한 인공위성의 자세결정이다[6]. 이 방법은 또한 쿼터니언의 구속조건을 피하기 위하여 구속조건이 없는 3개의 파라미터, 즉 오일러 각(Euler angle), 또는

MRP(Modified Rodrigues parameter)등을 사용한다. 그러나 이와 같은 쿼터니언과 3개의 파라미터 변환을 통한 추정방법이 최적의 추정 방법인지에 대해서는 의문점이 존재한다. 이와 같은 고른 필터 방법은 발산하지 않고 추정을 잘하는 것으로 알려져 있으나, 고른 필터가 가지고 있는 2차의 특성까지 잘 활용하지 못하고 잡음특성이 시스템에 단순히 더해지는 방법을 사용한다. 결과적으로, 고른 필터를 제한적으로 사용하고 있다는 단점이 있다. 또 다른 접근방법으로, 파티클 필터(particle filter)를 사용한 자세결정 알고리즘이 연구되었다[7]. 이 방법은 다양한 잡음 특성을 가지는 모든 시스템 및 측정값을 사용할 수 있다는 장점을 가지고 있으나, 계산량이 비교적 많다는 단점이 있어서 실시간 자율항법기법을 적용하기에는 아직 한계가 있다. 몇가지 방법들이 쿼터니언의 구속조건을 만족하기 위한 방법이 있으나, 명시적인 방법이라기 보다, 단순 정규화를 통한 방법들이 소개되었다.

QUEST 자세 결정 알고리즘의 단점을 보완하기 위하여 확장된 QUEST알고리즘이 소개되었다. 이 방법은 칼만 필터의 구성을 빌려와 다양한 변수의 추정이 가능하다는 것과, 원래 QUEST가 소유하고 있는 특성인, 초기 오차가 큰 상태에서도 마찬가지로 잘 수렴한다는 장점이 있다. 그러나, 분산을 전파하는 과정에서 선형화가 필요하다[5].

본 논문에서는 이와 같은 특이점 및 선형화 문제점을 해결하기 위하여 고른 필터를 이용한 인공위성의 자세 결정 문제를 다루었다. 즉 고른 필터가 가지고 있는 특성을 모두 활용하는 것이 하나의 목표이다. 이것은 간단히 시스템 및 측정치의 잡음특성이 서로 독립이라는 가정으로 간단히 적용 가능하다. 이것은 고른 필터를 위한 시그마 점(sigma point) 및 공분산을 위한 행렬제곱근(matrix square root)등의 계산을 상당히 줄일 수 있다. 또한 쿼터니언의 구속조건을 만족하기 위하여 QUEST알고리즘이 가지고 있는 특성을 적용하였다. 이것을 해결함으로써 구속조건을 명시적으로 만족하였다. 이 변형된 와바 문제의 장점은 자세측정벡터뿐만 아니라, 쿼터니언 측정값을 동시에 적용이 가능하다는 것이다.

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2008. 5. 15., 채택확정 : 2008. 6. 30.

이현재, 최윤혁, 방효충 : KAIST 항공우주공학과

(leeghim@ascl.kaist.ac.kr/yhchoi@ascl.kaist.ac.kr/hcbang@ascl.kaist.ac.kr)

박종오 : 동아대학교 전자공학과(g9672291@donga.ac.kr)

※ 본 연구는 과학기술위성3호 개발사업에 의하여 연구되었음.

본 논문은 다음과 같은 형태로 진행된다. 먼저 간단히 칼만 필터에 대하여 소개하고, 제안하고자 하는 효과적인 고른 필터에 대해서 설명한다. 다음 자세결정을 위한 시스템 및 측정 모델에 대해서 설명하고, 한, 지금까지 소개된 방법을 인공위성의 자세결정을 위한 형태로 변형한다. 마지막으로 수치적 시뮬레이션을 통해서 제안된 방법을 검증한다.

II. 고른 필터(unscented filtering)

본 장에서는 향상된 고른 필터에 대하여 소개하고자 한다. 이해를 쉽게 하기 위하여 먼저 칼만필터에 대하여 간단히 소개하기로 한다. 이산화된 비선형 시스템(discrete-time nonlinear equation) 및 측정식(measurement equation)은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, w_k, k) \\ y_k &= h(x_k, v_k, k) \end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $x_k \in R^n, y_k \in R^m$ 는 각각 상태 변수벡터와 측정변수벡터를 나타내며, $w_k \in R^n, v_k \in R^m$ 는 가우시안 백색 잡음(white Gaussian noise process)을 나타내고 이들의 평균과 공분산 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} E\langle w(k) \rangle &= 0 \\ E\langle v(k) \rangle &= 0 \\ E\langle w(k)w^T(j) \rangle &= Q_k(k, j)\Delta(k-j) \\ E\langle v(k)v^T(j) \rangle &= R_k(k, j)\Delta(k-j) \end{aligned} \tag{2}$$

여기에서 $E\langle \cdot \rangle$ 는 기대값을 나타내고 $\Delta(k-j)$ 는 크로네크 델타 함수(Kronecker delta function)를 나타내며, Q_k, R_k 는 각각 w_k, v_k 의 공분산을 나타낸다.

먼저, 주어진 초기값으로부터 최소 공분산 추정값은(minimum variance estimate) 간단히 조건 기대값(conditional expectation)으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{x}_{k+1}^- = E\langle f(\hat{x}_k^+, w_k, k) \rangle \tag{3}$$

그러나, 일반적인 칼만 필터는 비선형 시스템이라 할지라도 선형화된 모델을 사용한다. 즉, 다음과 같이 근사화된 추정값을 사용하게 된다[1].

$$\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k^+, k) \tag{4}$$

이와 같은 가정은 시스템이 선형이라는 가정하에서는 이론적으로 문제가 없으나, 일반적인 비선형 시스템에서는 (3)을 상태변수의 추정값과 공분산의 전파를 위하여 사용하여야 한다. 이 같은 전파방법이 기존의 칼만필터와 고른필터의 가장 큰 차이점 중에 하나이다.

측정 갱신(measurement update)를 위하여 칼만 이득은 다음과 같이 주어진다.

$$K_{k+1} = P_{k+1}^{yy} \left(P_{k+1}^{yy} \right)^{-1} \tag{5}$$

그리고 이것을 통한 최소 공분산 추정값은 다음과 같다.

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^-) \tag{6}$$

여기에서 $y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^-$ 로 정의된 측정 오차의 공분산은 P_{k+1}^{yy}

로 정의 되며, P_{k+1}^{yy} 은 \hat{x}_{k+1}^- 와 \hat{y}_{k+1}^- 에 관련된 상호상관 공분산 행렬(cross correlation matrix)을 나타낸다. 다음 단계를 위하여 공분산의 갱신은 다음과 같이 이뤄진다.

$$P_{k+1}^+ = P_{k+1}^- - K_{k+1}P_{k+1}^{yy}K_{k+1}^T \tag{7}$$

고른 필터는 고른 변환(unscented transformation)의 순환적인 추정방법(recursive estimation)에 해당한다. 이 방법이 칼만 필터와 다른 점은 시그마점(sigma point)들을 이용한다는 것인데, 이 점들을 이용하여 통계적인 접근방법을 통해서 전파된 추정치와 통계값을 획득한다는 것이다. 그러나, 이와 같은 통계적인 방법은 기본적으로 $[x_k, w_k, v_k]$ 공간에서 시그마 점들을 만들기 위한 계산량이 상당히 크다는 단점을 가지고 있다. 만일 아래의 같이 잡음 특성이 단순히 백색 정규분포이며 시스템에 더해지는 형태라면[8].

$$x_{k+1} = f(x_k, k) + w_k \tag{8}$$

시그마점을 만들기 위한 공간은 단순히 $[x_k]$ 로 줄어들게 되고, 계산량은 극적으로 단순화된다. 그러나, 고른 필터는 다양한 형태의 잡음특성의 적용이 가능하고, 일반적으로 (8) 과 같이 단순히 더해지는 비선형 시스템은 거의 없다. 즉, 이와 같은 방법은 원래 고른 변환의 특성의 완벽하게 사용하지 못한다는 단점을 가지고 있다. 시그마점을 줄임으로써 얻을 수 있는 또 하나의 장점은 이들의 분산값을 계산하기 위한 공간이 극적으로 줄어든다는 장점이 있다. 역으로, 시그마점을 계산하기 위해서는 공분산의 제곱근행렬이 필요한데 이것은 행렬의 크기와 비례한다. 이와 같은 문제점을 줄이기 위하여 촐레스키 분해기법(Cholesky decomposition)을 적용한다.

1. 효율적인 고른 필터

앞서 설명한 바와 같이 고른필터의 기능을 충분히 활용하기 위해서는 잡음특성이 단순히 시스템에 더해지는 것이라는 가정을 회피하면서 계산량을 줄일 수 있는 방법을 제안하여야 한다. 본 논문에서는 이와 같은 특성을 살리기 위하여 매우 간단하면서 현실적인 가정을 하게 된다. 즉, 상태운동방정식과 측정방정식간의 잡음변수에 대하여 서로 연관성이 없다고 가정한다. 이것은 앞서 설명한 기본적으로 $[x_k, w_k, v_k]$ 공간에서 서 모든 변수가 서로 관련이 없다는 것을 의미하며, 실제로 거의 대부분의 비선형 시스템은 여기에 포함된다. 이와 같은 가정은 $[x_k, w_k, v_k]$ 공간에서 만들어지는 분산은 각각의 방정식을 기반으로 하는 2개의 작은 공분산(P_k, M_k)으로 분해할 수 있다.

잡음특성이 더해지는 (8)과 같은 선형 시스템의 경우 상태변수는 운동 방정식에 의해서 전파되는데, 이것은 간단히 상태전이행렬(state transition matrix)을 곱함으로써 계산되며, 잡음의 공분산값도 이에 따라 적분을 수행해주어야 한다. 그러나, 고른 변환을 통한 비선형 시스템의 상태변수 변환은 잡음특성을 자동적으로 고려하여 전파된다. 게다가, 초기의 잡음특성이 변하지 않는다면, 나머지 작업은 더욱 간단히 자동적으로 계산된다. 종합하여 보면, 시그마점을 계산하기 위한 공분산 행렬은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{P}_k} &= \begin{bmatrix} \sqrt{P_k} & 0 \\ 0 & \sqrt{Q_k} \end{bmatrix} \\ \sqrt{\mathbf{M}_k} &= \begin{bmatrix} \sqrt{P_k} & 0 \\ 0 & \sqrt{R_k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

위의 식에서 보는 바와 같이, 각각의 잡음특성이 서로 관련이 없다는 가정하에, 고른변환을 위한 시그마점의 생성은 (1)의 각각의 비선형 방정식에 대하여 고려한 것이 된다. 다시 말하면, 이와 같은 작업은 일반적인 비선형 시스템에 있어서 매우 합리적인 방법이다. 결과적으로 원래의 $[x_k, w_k, v_k]$ 공간에서 각각 $[x_k, v_k]$ 와 $[x_k, w_k]$ 의 공간으로 나눌 수 있다. 이들 변수의 상관관계가 서로 독립이라는 가정은 행렬 제곱근계산에 있어서 오직 Q_k, R_k 의 크기만을 고려하기만 하면 된다. 이와 같은 방법은 (8)를 위한 단순화된 고른 필터의 성능과 거의 동일하다. 다만, 시그마 점의 개수가 대략 2 배정도 늘어난다는 단점을 가지고 있다. 그러나, 고른 필터의 성능을 완전히 유지하면서도 계산량을 단순 잡음이 더해지는 시스템과 거의 유사하다는 것은 큰 발전이라고 할 수 있다.

그러면, 이와 같은 방법을 적용한 고른 필터의 과정을 살펴보면 다음과 같다. 먼저 (1)의 첫번째 식을 이용한 전파과정을 살펴보자. 여기에서는 $[x_k, w_k]$ 공간에서의 시그마점(ζ)의 집합이 필요하다. 이를 위한 기준점을 다음과 같이 정의하자[8].

$$\begin{aligned} \zeta_{k,0} &= [\hat{x}_k^{+T}, \hat{w}_k^T]^T \in R^{2n} \\ \zeta_0 &= \frac{\kappa}{2n + \kappa} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 ζ_0 와 κ 는 각각 가중치 상수들이다. 이들의 평균과 공분산은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} E\langle \zeta_k(k) \rangle &= [\hat{x}_k^{+T}, 0]^T \\ E\langle \zeta_k(k) \zeta_k^T(j) \rangle &= \mathbf{P}_k(k, j) \Delta(k - j) \end{aligned} \quad (11)$$

이들을 위한 시그마점의 집합은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \zeta_{k,i} &= \zeta_{k,0} + \delta \zeta_{k,i} \\ \zeta_{k,-i} &= \zeta_{k,0} - \delta \zeta_{k,i} \\ \zeta_i &= \zeta_{-i} = \frac{\kappa}{2(2n + \kappa)} \end{aligned} \quad (12)$$

여기에서

$$\delta \zeta_{k,i} = \gamma_p (\sqrt{\mathbf{P}_k})_i \quad i = 1, \dots, 2n \quad (13)$$

$(\sqrt{\mathbf{P}_k})_i$ 는 \mathbf{P}_k 의 제곱근 행렬의 i 번째 열벡터를 의미하며, $\gamma_p = \sqrt{2n + \kappa}$ 로 정의되는 가중치 상수를 나타낸다. 고른 변환을 통한 상태변수의 추정값은 다음과 같이 각각의 시그마 점을 변환함으로 얻어질 수 있다.

$$\zeta_{k+1,i}^x = f(\zeta_{k,i}, k) \quad (14)$$

결과적으로, (14)를 적용한 모든 시그마 점들을 이용하여

전파된 추정값과 공분산을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}^- &= \sum_{i=-2n}^{2n} \zeta_i \zeta_{k+1,i}^x \\ P_{k+1}^- &= \sum_{i=-2n}^{2n} \zeta_i (\zeta_{k+1,i}^x - \hat{x}_{k+1}^-) (\zeta_{k+1,i}^x - \hat{x}_{k+1}^-)^T \end{aligned} \quad (15)$$

이와 같은 방법을 이용하여 전파된 상태변수와 공분산의 정확도는 2차의 오차 정확도에 해당하는 것으로 알려져 있다[8].

칼만 필터의 측정값 갱신(measurement update)을 위하여 다시 한번 고른 변환을 수행할 필요가 있다. 즉 (1)의 두번째 식을 적용한 측정값 갱신을 위하여 필요하다. 여기에서는 $[x_k, v_k]$ 공간에서의 시그마 점(χ)의 집합이 필요하다. 이를 위한 기준점을 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \chi_{k+1,0} &= [\hat{x}_{k+1}^T, \hat{v}_{k+1}^T]^T \in R^l \\ \xi_0 &= \frac{\kappa}{l + \kappa} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 ξ_0 와 κ 는 각각 가중치 상수들이고, 이들을 위한 변수의 크기 $l = n + m$ 이다. 이들의 평균과 공분산은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} E\langle \chi_{k+1} \rangle &= [\hat{x}_{k+1}^T, 0]^T \\ E\langle \chi_{k+1}(k+1) \chi_{k+1}^T(j) \rangle &= \mathbf{M}_{k+1} \Delta(k+1-j) \end{aligned} \quad (17)$$

이들을 위한 시그마점의 집합은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \chi_{k+1,i} &= \chi_{k+1,0} + \delta \chi_{k+1,i} \\ \chi_{k+1,-i} &= \chi_{k+1,0} - \delta \chi_{k+1,i} \\ \xi_i &= \xi_{-i} = \frac{\kappa}{2(l + \kappa)} \end{aligned} \quad (18)$$

여기에서

$$\delta \chi_{k+1,i} = \gamma_m (\sqrt{\mathbf{M}_{k+1}})_i \quad i = 1, \dots, l \quad (19)$$

또한, $(\sqrt{\mathbf{M}_{k+1}})_i$ 는 \mathbf{M}_{k+1} 의 제곱근 행렬의 i 번째 열벡터를 의미하며, $\gamma_m = \sqrt{l + \kappa}$ 로 정의되는 가중치 상수를 나타낸다. 고른 변환을 통한 상태변수의 예측 측정 시그마점은 다음과 같이 각각의 시그마점을 변환함으로 얻어질 수 있다.

$$\chi_{k+1,i}^y = h(\chi_{k,i}, k) \quad (20)$$

따라서, 예측된 측정 추정값은 다음과 같이 계산된다.

$$\hat{y}_{k+1}^- = \sum_{i=-l}^l \xi_i \chi_{k+1,i}^y \quad (21)$$

측정 공분산과 상호 상관 공분산 행렬은 다음과 같이 통계적인 방법을 통해서 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{yy} &= \sum_{i=-l}^l \xi_i (\chi_{k+1,i}^y - \hat{y}_{k+1}^-) (\chi_{k+1,i}^y - \hat{y}_{k+1}^-)^T \\ P_{k+1}^{xy} &= \sum_{i=-l}^l \xi_i (\chi_{k+1,i}^x - \hat{x}_{k+1}^-) (\chi_{k+1,i}^y - \hat{y}_{k+1}^-)^T \end{aligned} \quad (22)$$

최종적으로, 측정갱신을 위한 칼만 이득은 (5)에 의해서 얻

을 수 있으며, 최적의 상태변수 추정치와 다음단계를 위한 상태변수 오차 공분산은 각각 (6)과 (7)에 의해서 얻어진다.

III. 자세 방정식 및 센서 모델

1. 자세 운동 방정식

본 절에서는 인공위성 자세 결정을 위한 자세 및 센서모델에 대하여 살펴보기로 한다. 먼저 대표적인 자세를 표현하는 방법으로, 다음과 같이 $q = [p^T, q_4]^T$ 정의되면, 이것은 다시 $p = [q_1, q_2, q_3]^T$, 3개의 원소로 이뤄진 쿼터니언 벡터와, 1개의 실수로, 쿼터니언이라 불린다. 이것의 특성에 대해서 간단히 알아보자. 즉, 쿼터니언을 통한 자세 변환 방정식은 다음과 같이 정의된다[6].

$$\begin{aligned} [q \otimes] q' &= \begin{bmatrix} q_4 I_{3 \times 3} - p^x & p \\ -p^T & q_4 \end{bmatrix} q' \\ q^{-1} &= [-p^T \quad q_4]^T \\ q \otimes q^{-1} &= q_I = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned} \quad (23)$$

여기에서 하나의 3차원 벡터 $x \in R^3$ 에 대한 반대칭 행렬 (skew symmetric matrix)에 대한 정의는 다음과 같이 구성된다.

$$x^x = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기에서 $I_{n \times n}$ 은 $n \times n$ 행렬의 단위행렬(identity matrix)를, q^{-1} 은 q 의 역 쿼터니언(inverse quaternion)을, 그리고, q_I 는 단위 쿼터니언(identity quaternion)을 나타낸다. 쿼터니언은 $q^T q = 1$ 이라는 구속조건을 항상 만족해야 한다. 일반적으로, 쿼터니언과 자세변환행렬과는 다음과 같은 관계식이 존재한다.

$$\begin{aligned} A(q) &= (q_4^2 - \|p\|^2) I_{3 \times 3} + 2pp^T - 2q_4 p^x \\ &= \Xi^T(q) \Psi(q) \end{aligned} \quad (25)$$

여기에서

$$\begin{aligned} \Xi(q) &= \begin{bmatrix} q_4 I_{3 \times 3} + p^x \\ -p^T \end{bmatrix} \\ \Psi(q) &= \begin{bmatrix} q_4 I_{3 \times 3} - p^x \\ -p^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

마지막으로 쿼터니언에 대한 자세에 따른 운동방정식은 다음과 같다.

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega(\omega) q = \frac{1}{2} [q_\omega \otimes] q \quad (27)$$

여기에서 $q_\omega = [\omega^T \quad 0]^T$ 로 정의된다.

2. 센서 모델

각속도를 측정하는 센서중에 광범위하게 사용되는 것으로 FOG(Fiber Optic Gyros)와 같은 형태의 적분형 자이로가 있다. 이와 같은 센서의 수학적 모델은 다음과 같은 형태가 광범위하게 사용된다.

$$\begin{aligned} \omega_g &= \omega - b - \eta_a \\ \dot{b} &= \eta_b \end{aligned} \quad (28)$$

여기에서 ω_g 는 자이로에서 나오는 실제값을 나타내며, b 는 자이로의 바이어스를, 그리고 η_a, η_b 는 각각 아래와 같은 특성을 갖는 백색 정규 분포 잡음프로세스를 나타낸다.

$$\begin{aligned} E\langle \eta_a \rangle &= 0 \\ E\langle \eta_b \rangle &= 0 \\ E\langle \eta_a(t_1) \eta_a^T(t_2) \rangle &= I_{3 \times 3} \sigma_a^2 \delta(t_1 - t_2) \\ E\langle \eta_b(t_1) \eta_b^T(t_2) \rangle &= I_{3 \times 3} \sigma_b^2 \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (29)$$

여기에서 σ_a, σ_b 은 각각 η_a, η_b 의 표준편차를 나타낸다. 또한, 인공위성의 자세를 측정하기 위한 별센서 모델은 다음과 같이 주어진다.

$$q_s = \delta q_s \otimes q \quad (30)$$

여기에서 q_s 는 별센서에서 측정되는 실제값을 나타내고, 잡음 쿼터니언 벡터 δq_s 는 독립된 백색 잡음으로 다음과 같은 특성을 가진다.

$$\begin{aligned} E\langle \eta_s \rangle &= 0 \\ E\langle \eta_s(t_1) \eta_s^T(t_2) \rangle &= I_{3 \times 3} \sigma_s^2 \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (31)$$

여기에서 σ_s 은 각각 η_s 의 표준편차를 나타낸다.

IV. 자세 추정(attitude estimation)

본 장에서는 앞서 제안한 고른 필터를 적용하여 인공위성의 자세를 추정하는 문제를 고려하였다. 추정하고자 하는 변수는 쿼터니언과 자이로의 바이어스이며, 나아가, 인공위성의 각속도를 추정하게 된다. 선형화된 방법을 적용하는 것이 아니기 때문에, (27)의 쿼터니언의 운동방정식을 바로 적용하는 것이 하나의 방법이 될 것이다. 그러나, 이와 같은 방법은 쿼터니언의 구속조건 때문에 공분산 행렬이 특별한 경우에 발산한다는 단점이 존재한다. 또한, 고른 필터를 적용한 경우 통계적인 방법을 통한 평균값을 획득하게 되는데, 이와 같은 통계적인 방법을 통하여 얻은 쿼터니언 추정값이 구속조건을 만족한다는 보장이 근본적으로 어렵다[6]. 기존의 고른 필터를 적용한 인공위성의 자세결정은 이 문제를 회피하기 위하여 3개의 파라미터로 변환을 통하여 특이점 문제를 해결하고, 통계적인 방법을 통한 평균과 공분산을 계산하게 된다. 문제는 이와 같은 구속조건 없는 3축 파라미터로의 변환을 통한 추정값이 최적의 추정값이라는 보장이 어렵다는 것이다. 왜냐하면 3축 파라미터의 대상으로써 오일러 각이나 MRP등이 존재하는데, 어떤 변환과정을 선택하는냐에 따라 다른 결과가 나타날 수 있기 때문이다. 게다가, 효율적인 계산측면에서 보았는데, 각각의 시그마점에 해당하는 쿼터니언을 3축파라미터로 변환하는데 상당한 계산량이 필요하다고 할 수 있다.

앞서 설명한 바와 같이, 고른 필터는 시그마점들을 통한 통계적인 방법을 통한 추정을 하게 된다. 즉, 쿼터니언을 위한 최적화된 평균을 구하는 방법이 필요하다. 이와 같은 문제를 해결하기 위하여 본 논문에서는 다음과 같은 문제를 제

안한다. 즉, 주어진 구속조건을 만족하면서 쿼터니언의 오차를 최소화하는 평균값을 구하는 최적화문제로 해석이 가능하다. 다음과 같은 가격함수에

$$J = \sum_{i=1}^n (\delta p_i)^T W_i (\delta p_i) \quad (32)$$

구속조건은

$$q^T q = 1 \quad (33)$$

과 같이 주어진다. 여기에서 W_i 는 i 번째의 양의가중치 행렬 (positive-definite weighting matrix)을 나타내고, δp_i 는 다음과 같이 주어진 $\delta q_i = q_i \otimes q^{-1}$ 의 오차 쿼터니언 벡터를 나타낸다.

문제: (33)을 만족하면서 (32)를 최소화하는 q 를 구하시오.

해: 먼저, 오차 쿼터니언 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \delta p_i &= -q_A p + p_i^* p + q_A p_i \\ &= -\Psi^T(q_i) q \end{aligned} \quad (34)$$

위의 (33)을 (32)에 넣고 다시 정리하면 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$J(q) = q^T N q \quad (35)$$

여기서

$$N(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n \Psi(q_i) W_i \Psi^T(q_i) \quad (36)$$

(33)을 만족하면서 가격함수의 (35)을 최소화하는 쿼터니언을 구하는 문제는 아래와 같이 간단히 라그랑지곱(Lagrange multiplier)을 적용함으로써 얻을 수 있다.

$$J(q) = q^T N q + \lambda(1 - q^T q) \quad (37)$$

여기에서 λ 는 라그랑지곱이다. 가격함수를 최소화하는 필요 조건을 적용하면 다음과 같다.

$$Nq = \lambda q \quad (38)$$

위의 식으로부터, 결국 주어진 문제는 행렬 N 에 대한 고유치 문제(eigenvalue problem)로 귀결된다는 것을 알 수 있다. 결국 정리하면, 여기에서 구하고자 하는 최적의 쿼터니언은 (36) 행렬의 가장 작은 고유치(eigenvalue)에 해당하는 고유벡터(eigenvector)이다. 이와 같은 고유치 문제는 잘 알려진 QUEST 알고리즘을 통하여 쉽게 얻을 수 있다.

1. 필터 전파(propagation)

필터구성을 위하여 먼저 상태변수의 전파가 필요하다. 본 논문에서 적용하고자 하는 고른필터를 위하여 다음과 같이 정의된 기준 시그마점을 정의한다.

$$\zeta_{k,0} = [\hat{p}_k^{+T} \quad \hat{b}_k^{+T} \quad \hat{\eta}_{a_k}^T \quad \hat{\eta}_{b_k}^T]^T \quad (39)$$

여기에서 잡음($\hat{\eta}_{a_k}^T, \hat{\eta}_{b_k}^T$)의 최적 추정치는 0이다. 쿼터니언의 작은 변화는 일반적으로 오차 쿼터니언 벡터를 분석함으로써 알 수 있는데, 이와 같은 3차원의 벡터는 독립이라 할 수 있다. 이와 같은 이유 때문에, 특이점 문제 또는 구속조건 문제등을 해결하기 위하여 쿼터니언 벡터가 쿼터니언을 대신

하여 많이 사용되고 있다. 특히 오차 쿼터니언 벡터가 수치적인 문제를 해결하기 위하여 사용된다. 그러나, 본 장에서는 비선형 운동방정식 자체를 사용하기 위하여 쿼터니언 벡터 자체를 사용하기로 한다. 앞으로 설명하겠지만, 결론적으로 말하면, 이와 같은 접근 방법이 기존의 오차 쿼터니언 벡터를 사용하는 것과 같은 결론에 도달한다는 것을 알 수 있다. 자세결정을 위한 하나의 기준 시그마점은 다음과 같이 정의된다.

$$\zeta_{k,0}^q = \hat{q}_k^* \quad (40)$$

먼저, 기준 시그마점에서 고르게 뿌린 형태의 시그마점을 구하기 위하여 (13)를 사용하게 되고, 자세에 대한 고른 분포는 다음과 같은 형태를 가지게 된다.

$$\delta \zeta_{k+1,i}^q = \left[(\delta \zeta_{k+1,i}^p)^T \sqrt{1 - (\delta \zeta_{k+1,i}^p)^T (\delta \zeta_{k+1,i}^p)} \right]^T \quad (41)$$

그러면, 기준점을 통한 고른 분포의 시그마점의 집합은 (12)에 의해서 만들어진다. 게다가, 쿼터니언 대한 시그마점의 집합은 오차 쿼터니언 벡터를 이용하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\zeta_{k+1,i}^q = \delta \zeta_{k+1,i}^q \otimes \zeta_{k+1,0}^q \quad (42)$$

참고로, $\zeta_{k+1,0}^q$ 은 단위 쿼터니언이다. 각속도와 관련된 시그마 점은 다음과 같이 계산된다.

$$\zeta_{k,i}^\omega = \omega_g + \zeta_{k,i}^b + \zeta_{k,i}^{\eta_a} \quad (43)$$

위와 같이 구하고자 하는 모든 상태변수에 대하여 시그마점을 계산할 수 있으나, 실제로 쿼터니언 벡터 $\zeta_{k,i}^p$ 에 관한 시그마점 집합은 생성되지 않는다. 필터 전파를 위해서, 쿼터니언 벡터보다 쿼터니언을 사용하는 것이 더욱 효율적이기 때문이다. 주어진 적분간격 Δt 에 대하여 자세결정을 위한 시그마 점들에 대한 전파식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \zeta_{k+1,i}^q &= \Omega_k(\zeta_{k,i}^q) \zeta_{k,i}^q \\ \zeta_{k+1,i}^b &= \zeta_{k,i}^b + \zeta_{k,i}^{\eta_b} \Delta t \end{aligned} \quad (44)$$

여기에서, 각속도가 주어진 적분 시간 동안 일정하다는 가정 하에 (27)에 대한 상태전이행렬로 다음과 같이 주어진다[6].

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{2} \|\omega_k\| \Delta t) I_{3 \times 3} - \psi_k^* & \psi_k \\ -\psi_k^T & \cos(\frac{1}{2} \|\omega_k\| \Delta t) \end{bmatrix} \quad (45)$$

여기에서 $\psi_k = \sin(0.5 \|\omega_k\| \Delta t) \omega_k / \|\omega_k\|$ 이다. 이와 같은 식을 통하여 전파된 시그마점들은 앞서 설명한 바와 같이 (38)을 이용하여 최적의 쿼터니언에 대한 평균값을 획득하게 된다.

2. 측정갱신(measurement update)

필터의 두번째 단계로, 측정값을 이용하여 전파된 상태변수를 다시 한번 갱신할 필요가 있다. 이와 같은 작업을 위하여 다음과 같이 시그마점을 정의한다.

$$\chi_{k+1,0} = [\hat{p}_k^{+T} \quad \hat{b}_k^{+T} \quad \hat{\eta}_{a_k}^T]^T \quad (46)$$

여기에서 잡음($\hat{\eta}_{s_k}^T$)의 최적 추정치는 0이다. 측정된 쿼터니언에 대한 기준 시그마점은 다음과 같다.

$$\chi_{k+1,0}^q = \hat{q}_{k+1}^- \quad (47)$$

측정갱신을 위한 상태변수에 대한 고른 분포는 다음과 같은 형태를 가지게 된다.

$$\begin{aligned} \delta\chi_{k+1,i}^{q_i} &= \left[(\delta\chi_{k+1,i}^p)^T \sqrt{1 - (\delta\chi_{k+1,i}^p)^T (\delta\chi_{k+1,i}^p)} \right]^T \\ \delta\chi_{k+1,i}^{q_n} &= \left[(\delta\chi_{k+1,i}^n)^T \sqrt{1 - (\delta\chi_{k+1,i}^n)^T (\delta\chi_{k+1,i}^n)} \right]^T \end{aligned} \quad (48)$$

여기에서 $\delta\chi_{k+1,i}^q$ 는 오차 쿼터니언 벡터에 대한 공분산에 의하여 뿌려진 것이고, $\delta\chi_{k+1,i}^n$ 은 잡음프로세서 η_s 의 공분산에 의해서 뿌려지는 잡음 오차 고른점이다. 측정방정식에 의한 시그마 점들에 대한 전파는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \chi_{k+1,i}^{q_i} &= \chi_{k+1,i}^{q_n} \otimes \chi_{k+1,i}^q \\ \chi_{k+1,i}^{b_i} &= \chi_{k+1,i}^{b_i} \end{aligned} \quad (49)$$

이와 같이 전파된 시그마점들의 평균 쿼터니언은 (38)을 이용하여 다시 한번 획득이 가능하다. 또한 측정 방정식 (29)를 이용하여, 쿼터니언의 변화는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\left[\delta p_{s,k+1}^T \quad \delta q_{s,k+1}^T \right]^T = q_s \otimes (\hat{q}_{s,k+1}^-)^{-1} \quad (50)$$

(5)의 칼만이득을 적용하면

$$\delta \hat{x}_{k+1} = K_{k+1} \delta p_{s,k+1} \quad (51)$$

여기에서, $\delta \hat{x}_{k+1} = \left[\delta \hat{p}_{k+1}^T \quad \delta \hat{b}_{k+1}^T \right]^T$ 이다. 최종적으로, 상태변수는 다음과 같이 갱신된다.

$$\begin{aligned} \hat{q}_{k+1}^+ &= \delta \hat{q}_{k+1} \otimes \hat{q}_{k+1}^- \\ \hat{b}_{k+1}^+ &= \hat{b}_{k+1}^- + \delta \hat{b}_{k+1} \end{aligned} \quad (52)$$

여기에서, $\delta \hat{q}_{k+1} = \left[\delta \hat{p}_{k+1}^T \quad \sqrt{1 - \delta \hat{p}_{k+1}^T \delta \hat{p}_{k+1}^T} \right]^T$ 이며, 각속도에 대한 최적 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{\omega}_{k+1}^+ = \omega_g + \hat{b}_{k+1}^+ \quad (53)$$

그리고 상태변수의 공분산행렬은 (7)에 의해서 갱신된다.

V. 수치 시뮬레이션

본 장에서는, 제안된 방법의 고른 필터 성능을 검증하기 위하여 몇가지 수치적 시뮬레이션을 수행하였다. 이를 위한 기본적인 파라미터는 과학기술위성3호에 준하는 값을 선택하였다. 과학기술위성3호는 외계 운하 탐사등 다양한 임무가 주어져 있으며, 2013년에 발사예정인 국내에서 개발중인 위성이다. 이와 같은 임무를 수행하기 위해서는, 약 0.025도 (3σ)의 자세각 오차를 유지하여야 한다고 가정하였다. 여기에서 수행하는 시뮬레이션을 위한 주요센서로써, 저사양의 1개의 별센서와 3축 자이로가 있다. 자세한 센서의 주요사항은 다음의 표에 정리하였다.

표 1. 센서의 주요 사항.

Table 1. Sensor specifications.

기호	값
σ_s	롤 축 : 0.4×10^{-3} rad 피치축 : 0.4×10^{-3} rad
σ_a	요 축 : 8.1×10^{-3} rad
σ_b	4.36×10^{-5} rad/s ^{1/2}
	2.01×10^{-7} rad/s ^{1/2}

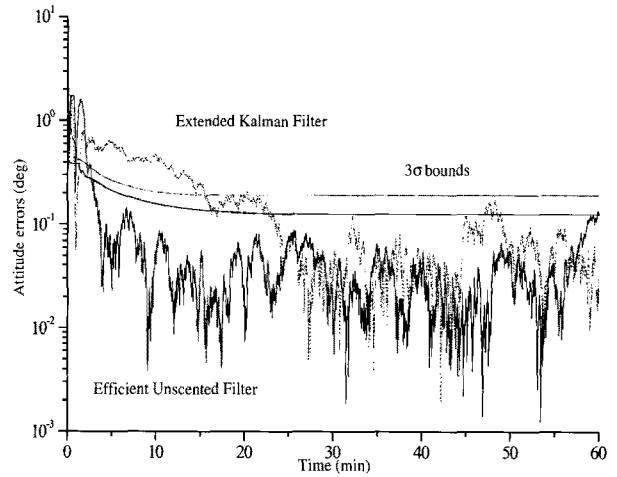


그림 1. 3축 자세각 오차의 크기 변화 비교(I).

Fig. 1. Norm comparison of attitude errors (I).

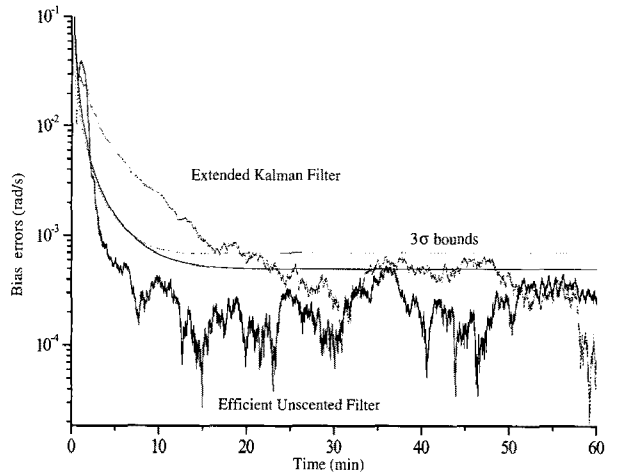


그림 2. 바이어스 오차의 크기 변화 비교(I).

Fig. 2. Norm comparison of gyro bias errors (I).

먼저, 초기 바이어스와 초기 자세오차를 각각 4.0×10^{-3} rad/s 와 10° 로 설정하였다. 초기 공분산 행렬을 $P_k = 0.01 I_{6 \times 6}$ 로 설정하였다. 공분산의 초기설정값을 선택할 때 주의가 필요하다. 왜냐하면, 실제로 물리적인 의미를 두더라도 1보다 큰 값을 선택해서도 안되며, 수치적으로 (41)의 제곱근 값이 허수가 될 수 있기 때문이다. 자이로와 별센서의 샘플링은 각각 0.25초와 1초로 설정하였다. 이와 같은 시나리오는 매우 현실적인 가정이라 할 수 있다. 칼만 필터와 제안된 고른 필터에 대하여 시뮬레이션을 수행한 결과가 그림 1, 2에 나타나 있다. 이와 같은 시나리오에서는 칼만필터와 제안된

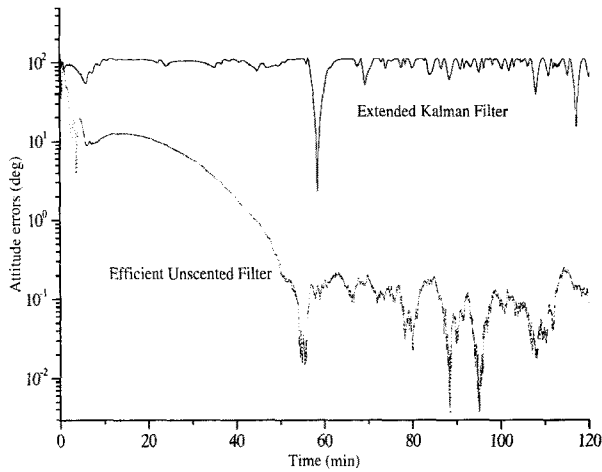


그림 3. 3축 자세각 오차의 크기 변화 비교(II).

Fig. 3. Norm comparison of attitude errors (II).

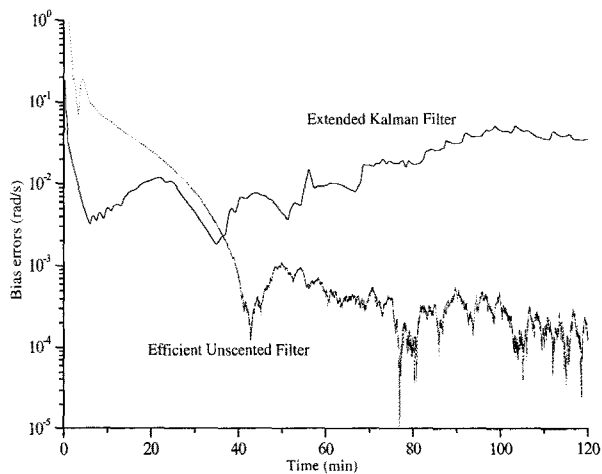


그림 4. 바이어스 오차의 크기 변화 비교(II).

Fig. 4. Norm comparison of gyro bias errors (II).

방법 모두 잘 수렴한다는 것을 알 수 있다. 다만, 주어진 센서 사양을 가지고 칼만필터를 적용하였을 때 과학기술위성의 임무를 수행하기 위해서는 다소 미흡하다고 할 수 있다. 그러나, 제안된 방법이 2차의 정확도를 가진다는 장점이 있기 때문에, 칼만필터보다 약간 더 정확하다는 것을 알 수 있고, 주어진 임무가 수행 가능하다는 것을 알 수 있다. 수치적으로 보았을 때 제안된 방법을 도입한 결과 약 30%의 성능이 향상되었다고 할 수 있다.

다음으로 초기바이어스를 2.0rad/s로 상당히 크게 설정하고 별센서의 샘플링을 2.0초로 가정하였다. 이와 같이 설정하였을 때, 시뮬레이션을 다시 한번 수행하였다. 그 결과는 위 그림 3,4에 나타내었다.

림 3,4에 나타내었다.

앞의 결과에서 보는 바와 같이 초기오차가 큰 경우, 또는 측정값에 다른 보정속도가 느려지는 경우에 칼만 필터는 수렴하지 못하는 결과가 일어났다. 전파에 의한 오차가 작아야 한다는 것을 알 수 있다. 즉, 고른필터에 의한 좀더 정확한 전파가 수렴성을 향상시킨다고 할 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 기존의 고른 필터(Unscented Filter)를 재구성하여 원래의 특성을 최대한 활용하면서 속도를 향상시키는 알고리즘에 대하여 소개하였다. 또한, 몇 개의 쿼터니언(Quaternion)이 존재하는 경우에 이들의 평균을 구하는 방법을 제안하였는데, 기존의 방법에 비하여 구속조건을 만족하면서 최적의 값을 산출할 수 있다는 것을 알 수 있었다. 제안된 필터는 인공위성의 자세결정 문제에 있어서 기존의 칼만 필터보다 초기값에 매우 강인하며, 수치적 시뮬레이션을 통해서 정확도가 증가한다는 것을 증명하였다.

참고문헌

- [1] E. J. Lefferts, F. L. Markley, and M. D. Shuster, "Kalman filtering for spacecraft attitude estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 5, no. 5, pp. 417-429, 1982.
- [2] I. Y. Bar-Itzhack, and Y. Oshman, "Attitude determination from vector observations : Quaternion estimation," *IEEE trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 21, no. 1, pp. 128-136, 2006.
- [3] M. D. Shuster, "Kalman filtering of spacecraft attitude and the QUEST model," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 13, no. 3, pp. 506-514, 1990.
- [4] M. D. Shuster, "Three-axis attitude determination from vector observation," *Journal of the Astronautical Science*, vol. 37, no. 1, pp. 41-58, 1989.
- [5] M. L. Psiaki, "Attitude determination filtering via extended quaternion estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, no. 2, pp. 206-214, 2000.
- [6] J. L. Crassidis and F. L. Markley, "Unscented filtering for spacecraft attitude estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 26, no. 4, pp. 536-542, 2003.
- [7] Y. Oshman and A. Carmi, "Attitude estimation from vector observation using genetic-algorithm embedded quaternion particle filter," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 29, no. 4, pp. 879-891, 2006.
- [8] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A new method for the nonlinear transformation of means and covariance in filters and estimators," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-45, no. 3, pp. 477-482, 2000.



이 현 재

2002년도 충남대학교 항공우주공학과 석사 졸업. 2007년도 KAIST 항공우주공학과 박사학위 취득. 현재 KAIST 항공우주공학과 박사 후 과정. 2004년도 KAI 항공우주논문상 대상 수상. 관심분야는 인공위성 자세결정 및 제어, 궤도결정 및 제어, 궤도전이 이론, 다양한 필터이론 및 응용.



방 효 충

1987년 서울대학교 항공우주공학과 졸업. 1992년 Texas A&M University 박사취득. 현 KAIST 항공우주공학과 부교수. 관심분야는 인공위성 자세역학 및 제어, 궤도 역학 및 제어, 무인비행체 시스템 개발 및 제어, 영상 처리 기술 및 항공

우주 응용.



최 윤 혁

2006년도 KAIST 항공우주공학과 석사 졸업. 현재 KAIST 항공우주공학과 박사과정. 관심분야는 인공위성 자세 결정 및 제어, 인공위성 군집비행이론 및 응용, 다양한 필터이론을 이용한 인공위성의 자세 결정.



박 종 오

2002년 동아대학교 박사학위 취득. 2008년도 KAIST 항공우주공학과 박사후 과정. 2008년 현 동아대학교 전임강사. 관심분야는 인공위성 자세 결정 및 제어, 퍼지 이론 및 응용, 전자 회로 설계.