# Heath-Jarrow-Morton 모형을 이용한 우리나라 이자율 기간구조 추정

이 병 근

(경산대학교 경상학부)

현 정 순

(KAIST 금융공학연구센터)

<요 약>

이자율 기간구조는 은행의 VaR 시스템구축을 위해서 뿐만 아니라 채권의 가치평가, 채권투자의 성과평가, 자산-부채 관리, 이자율 예측, 이자율 관련 파생상품의 가격결정 등에 필수 불가결한 정보라 할 수 있다. 본 연구는 Heath-Jarrow-Morton 모형을 이용하여 우리 나라의 이자율 기간구조모형을 추정하였다. 추정을 위해서 국채 중 무이표채인 통화안정증권의 기준수익률을 이용하였다. 실증분석 결과 추정된 모수의 값은 미국 재무성증권을 이용하여 추정한 추정치와 크게 다르지 않으며 설명력면에서도 좋은 결과를 나타내고 있다. 아직 우리 나라 이자율 기간구조에 대한 연구가 부족한 상황하에서 다양한 방법을 시도하여 가장 합리적 모형을 찾아나가는데 유용한 정보를 제공하는 것으로 본 연구가 의의를 갖는다 하겠다.

# I. 서론

이자율 기간구조(term structure of interest rate)는 만기만이 다른 동일한 채권의 만기수익률(yield to maturity)과 만기와의 관계를 나타낸다. 이러한 이유로 이자율 기간구조는 만기수익률을 만기별로 연결하여 그린 곡선을 나타내는 수익률 곡선(yield curve)으로 불리기도 한다.

이자율 기간구조는 금융계의 제반분야에서 소용되는 필수 불가결한 정보이다. 일정한 만기를 갖는 채권의 가치는 동일한 만기의 수익률을 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 그리고 그 채권가치의 변동성은 만기수익률의 변동성에 의존하게 된다. 이자율 기간구조의 추정은 만기수익률과 변동성을 추정하는 것을 의미하므로 채권관련 자산의 가치와 그 변동성을 추정하기 위해 필요한 선결과제이다

금융기관들이 보유하고 있는 채권의 가치나 채권투자의 성과를 평가하기 위해서는 이자율 기간구조를 알아야 한다. 기업들의 자산-부채 관리를 위해서, 그리고 정부의 이자율 예측 등 이자율 관리를 위해서도 이자율 기간구조의 추정은 유용한 정보를 제공한다. 최근에 우리 나라에서도 유통되기 시작한 이자율 관련 파생상품의 가격결정에 있어서도 없어서는 안 될 정보이다. 아울러 VaR(Value at Risk) 등 은행들의 소요자기자본 추정을 위해서도 필수적인 요소라 할 수 있다.

이러한 필요에도 불구하고 지금까지 우리 나라 이자율 기간구조에 대한 연구는 매우 부족한 실정이다. 현재까지의 연구는 엄영호, 김성현, 오승곤, 최성욱(1999), 김명직, 장국현(2000), 오규택, 김명직, 장국현(2000) 등 소수에 불과한 상태이다. 우리 나라 채권시장이 선진국에 비해 그리 활성화되지 않았을 뿐 아니라 채권시가평가도 1998 년 9 월부터 시작되는 등 시장환경이 성숙되지 않은 상태이기 때문에 이자율 기간구조에 대한 연구는 아직 초기단계라 할 수 있다. 채권시가평가제가 시행되기 전에는 수익률곡선의 필요성이 별로 없었을 뿐 아니라 체계적인 채권수익률 자료도 없었기 때문으로 볼 수 있다. 증권업협회가 1998 년 말부터 채권수익률 자료를 제공하면서 연구가 진행되고 있다고 볼 수 있다.

본 연구는 이러한 우리 나라에 적합한 이자율 기간구조 모형 확립에 일조하는데 그 목적이 있다. 특히, 기존의 연구와 다른 모형과 연구방법을 이용하여 이자율

기간구조를 추정함으로써 우리 나라의 이자율 기간구조를 이해하는데 기여하고자 한다.

기존의 연구들이 사용한 모형들과는 달리 본 연구는 선도이자율 자료를 이용하는 Heath-Jarrow-Morton(1992) 모형의 우리 나라 적용 가능성에 대해 살펴보고자 한다. 1999 년 2 월 이후의 통화안정증권의 기준수익률 자료를 이용한 결과 추정된 모수들의 값은 미국 재무성증권의 수익률 자료를 이용한 연구들과 크게 다르지 않았으며 설명력면에서는 미국의 경우보다 오히려 우수한 것으로 나타나고 있다. 채권시장이 그리 성숙되지 않았고 선물시장도 발달하지 않은 우리 나라의 여건을 고려할 때 오히려 예상외의 결과라 할 수 있다.

본 연구는 다음과 같이 구성되어 있다. 제 II 장에서는 이자율 기간구조에 대한 기존의 연구결과들을 살펴본다. 제 III 장은 본고의 실증분석에 사용될 모형을 제시하고 그 분석방법과 결과를 소개한다. 제 IV 장에서는 결론 및 시사점을 제시한다.

## II. 이자율기간구조에 대한 기존 연구

### 1. 이자율 기간구조 모형

이자율 기간구조에 관한 실증적 연구는 그 접근방법에 따라 두 부류로 나누어 볼 수 있다. 첫째는 통계적 접근방법으로 채권시장의 자료를 이용하여 수익률 기간구조를 가장 잘 나타내는 함수형태를 찾는 방법이다. 따라서 이 접근방법은 사용하는 함수의 모양에 따라 다항식, 스플라인, 계단함수 등의 여러 형태로 나누어진다. 엄영호 외(1999)의 연구는 비스플라인 방법의 하나인 Nelson-Siegel(1987)의 방법을 이용해 우리 나라의 채권 수익률 곡선을 추정하고 있다.

통계적 접근방법은 이론적인 제약없이 일반적인 함수 중 주어진 이자율 기간구조를 가장 잘 설명하는 함수를 찾아내는 방법이기 때문에 실제 가격의 변화를 대부분 설명할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 이론적 틀이 없어 이자율 기간구조의 동태적 변화를 일관성있게 설명할 수 없게 된다.

두 번째는 이론적 접근 방법으로 이자율 기간구조를 설명하는 동태 모형을 설정한 후 그 모형이 제시하는 바에 따라 기간구조를 추정하는 방법이다. 이론적 접근 방법에 따른 연구는 사용하는 이론적 모형에 따라 달라진다.

이자율 기간구조에 대한 이론적 모형은 채권의 가격이 시장의 균형가격에 의해 결정되는 일반균형 모형(general equilibrium model)과 차익거래 부재조건(no arbitrage condition)에 의해 결정되는 차익거래모형(arbitrage model)으로 나누어진다.

일반균형모형은 경제의 주어진 여건 하에서 개별 경제주체의 목적함수를 극대화하면서 모든 시장이 균형을 이루는 가격을 통해 이자율이 결정되는 모형이다. 주어진 상태변수들이 경제전체의 균형가격을 결정하게 되며 동태적 움직임은 상태변수들의 확률과정에 의해 변화한다. 따라서 일반균형모형은 어느 변수를 상태변수로 가정하느냐에 따라 달라진다.

실증분석 면에서 일반균형모형을 이용하는 경우 채권의 가격이 몇 개의 모수(parameter)에 의존하는 모형에 의해서 결정되기 때문에 다양한 수익률 곡선의 모양을 설명하는 데는 한계가 있다. 또한 모수의 값들이 특정한 시점에서의 가격과 무관하게 결정되는 관계로 현재의 채권가격과 괴리가 존재할 수도 있다. 반면, 일반균형모형은 이자율 기간구조의 동태적 변화에 대해 일관성있는 정보를 제공할 수 있는 장점이 있다.

차익거래모형은 Black-Scholes(1973)의 옵션가격모형에서와 같이 만기가 서로 다른 채권들을 이용하여 무위험 상태가 되도록 포트폴리오를 형성한 후, 차익거래기회가 존재하지 않기 위해서는 이 포트폴리오의 수익률은 무위험 이자율과 같아야 한다는 조건을 이용하여 채권들의 가격간의 관계식을 도출하는 모형이다.

차익거래모형을 이용한 실증분석에 있어서는 현재의 이자율 기간구조를 정확히 복제할 수 있도록 모수를 결정하므로 균형모형에서와 같은 괴리가 존재하지 않는다. 그러나 차익거래 모형의 경우 시간에 따라 모수가 계속 변하므로 이자율 기간구조의 동태적 변화에 대한 일관성이 있는 설명울 제공할 수 없다.

이론적 모형은 채권가격의 동태적 움직임을 결정하는 상태변수(state variables)가 몇 개인가에 따라 단일요인모형과 다요인모형으로 나누어 볼 수 있다.

이자율 기간구조 모형에서 사용되는 상태변수로는 순간이자율(instantaneous interest rate)이 가장 많이 사용되고 있으며, 그 외 순간이자율의 변동성, 장-단기 이자율의 차이(spread), 예상인플레이션 등도 상태변수로 사용되기도 한다.

대표적인 일반균형 모형인 Cox, Ingersoll, Ross(1985)[이하 CIR 로 약칭] 모형은 순간이자율만을 상태변수로 사용한 단일요인 일반균형모형이며 Vasicek(1977), Dothan(1978) 등은 단일요인 차익거래모형으로서 순간이자율을 상태변수로 사용하고 있다. Ho and Lee(1986)는 차익거래모형으로 시장에서 관찰되는 자료와 일관성을 유지하면서 확률적인 충격을 받는 이자율 격자(lattice)를 생성하는 방법을 처음으로 제시하였다. Ho and Lee 모형을 연속시간 모형으로 일반화한 Heath, Jarrow, Morton(1992)[이하 HJM 으로 약칭] 모형은 다요인 차익거래 모형이다. 본 연구에서는 HJM 모형을 하나의 상태변수만을 가정하여 단순화한 모형을 사용하고 있다.

Longstaff and Schwartz(1992)은 순간이자율과 그 변동성(volatility)을 상태변수로 사용한 2 요인 일반균형모형이며, Chen and Scott(1992)은 상태변수를 명시적으로 표시하지 않은 다요인 일반균형모형이다. 반면, Hull and White(1993)는 순간이자율과 그 추세항(drift)를 상태변수로 사용한 2 요인 차익거래 모형이다.

## 2. 우리 나라 이자율 기간구조에 관한 기존 연구

우리 나라 이자율 기간구조에 대한 현재까지의 연구는 엄영호, 김성현, 오승곤, 최성욱(1999), 김명직, 장국현(2000), 오규택, 김명직, 장국현(2000) 등을 들 수 있다. 엄영호 외(1999)는 Nelson-Siegel(1987)의 방법을 이용하여 산금채의 수익률 곡선을 추정하고 있다. Nelson-Siegel 방법은 통계적 추정방법의 하나로 기간구조를 비스플라인(non-spline)계의 함수형태로 상정하여 추정하고 있다. 3 개월부터 5 년만기의 산금채 수익률을 이용하여 수익률곡선을 추정한 결과 수익률은 만기에 따라 완만하게 우상향하는 모양을 보이고 있으며 평균적으로 20 베이시스 포인트 내외의 가격오차를 보이고 있다.

김명직, 장국현(2000)은 이론적 접근방법을 시도하고 있는데 CIR 모형 계통의 여러가지 지수-선형 모형을 이용하여 시도하고 있다. 통안채 기준수익률 자료를

이용하여 단일요인 CIR 모형과 2 요인 CIR 모형인 Chen and Scott(1995)의 모형을 추정한 결과 미국 재무성증권 수익률 자료를 이용한 연구들과 비슷한 결과를 보이고 있다.

오규택, 김명직, 장국현(2000)은 김명직, 장국현(2000)과 동일한 모형을 국고채 수익률 자료를 이용하여 추정하고 있다. 이자율 기간구조는 무이표채의 만기수익률을 이용하여야 하나 우리 나라 국채 중 무이표채인 통안채와 외평채는 거래가 그리 활발하지 않고 최장 만기가 2 년까지 밖에 존재하지 않는다. 오규택 외(2000)는 국고채의 모든 거래자료를 이용하여 국고채에 대한 무이표채 수익률 자료를 추정한 후 이자율 기간구조를 추정하고 있다. 단일요인과 2 요인 CIR 모형을 추정한 결과 미국 재무성증권 수익률을 이용한 기존의 연구들과 유사한 결과를 얻어 CIR 모형류의 이론 모형들이 우리 나라의 이자율 기간구조를 잘 설명하는 것으로 결론짓고 있다.

## III. HJM 모형을 이용한 실증 분석

### 1. 이론적 모형

이자율 기간구조 모형은 만기가 서로 다른 만기수익률(yield-to-maturity)의 동태적 현상을 설명하는 모형으로 만기수익률간의 관계를 나타내거나 무이표채(zero-coupon bond)의 가격, 또는 선도이자율(forward interest rate)의 만기와의 관계로 표시된다. 세 가지의 변수로 표시될 수 있는 이유는 다음의 관계식에서 보듯이 세 가지중 어느 하나를 알면 나머지를 다 알 수 있기 때문이다. $T$ $t$ $P(t, T)$ $i(t, T)$ $T$ $f(t, T)$ 만기가 인 무이표채의 시점에서의 가격을 라 하고, 이 채권의 만기수익률을 , 그리고 동일한 시점에서 기의 순간선도이자율을 라 하면 이들 간에는 다음의 관계가 성립한다.

$$P(t, T) = \exp[-i(t, T)(T-t)],$$

$$i(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln[P(t,T)],$$

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,T)ds\right), \quad (1)$$

$$f(t,T) = -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T}.$$

여기서 순간현물이자율( $r(t)$ )은 선도이자율의 극한 개념으로 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$r(t) = \lim_{T \to t} f(t,T) = f(t,t)$$

Heath-Jarrow-Morton(1992)은 선도이자율에 대해 다음과 같은 확률과정을 가정하고 있다.

$$f(t,T) - f(0,T) = \int_0^t \alpha(v,T)dv + \Sigma_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(v,T)dW_i(v) \quad (2)$$

$f(t,T)$ 여기서 는 결제일이 $T$ 인 선도이자율의 $t$ $\alpha(t,T)$ $W_i(t)$ $\sigma_i^2(t,T)$ $W(t)$ $n \times 1$ $n$시점에서의 값이며, 는 추세(drift)를 나타내며, 는 독립적인 위너과정(Wiener process)으로 의 분산(volatility)을 갖는다. 확률과정 는 차원의 벡터(vector)로 선도이자율이 개의 확률변수에 의해 결정됨을 나타낸다.

HJM 은 재정거래 부재(no arbitrage)의 조건을 이용하여 다음의 관계를 만족할 때만이 유일한 위험중립확률(equivalent martingale measure)이 존재함을 보였다.

$$\alpha(t,T) = -\Sigma_{i=1}^{n} \sigma_i(t,T)\left(\gamma_i(t) - \int_t^T \sigma_i(t,v)dv\right) \quad (3)$$

$\gamma_i(t)$ $i$ $W_i(t)$여기서 는 번째 확률변수 에 대한 시장위험가격(market price of risk)를 나타낸다.

식(3)은 재정거래부재 조건이 성립하고 유일한 위험중립확률이 존재하기 위해서는 선도이자율 확률과정의 추세(drift) 및 분산(volatility)과 시장위험가격 사이에는 위와 같은 일정한 관계가 성립되어야 함을 보여주고 있다.

$n$ 이러한 관계는 선도이자율이 한 개의 확률 변수에 의해 변화하는 경우를 가정하면(i.e. =1) 더욱 명확하게 나타내 질 수 있다. 단일확률변수에 의해 움직이는 경우 식(2)는 다음과 같이 나타내 질 수 있다.

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma_f(t,T)dw(t)$$

$w(t)$ $\sigma_f$여기서 단일한 위너과정 확률변수는 소문자 로 나타내었으며, 그 표준편차는 로 표시하였다. 식(3)을 이용하면 선도이자율은 다음과 같은 선형 과정으로 나타내질 수 있다.

$$df(t,T) = \sigma_f(t,T)\left[\gamma(t) - \int_t^T \sigma_f(t,v)dv\right]dt + \sigma_f(t,T)dw(t)$$

여기서 무이표채의 가격에 대한 확률과정을 다음과 같이 나타내 보자.

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \mu_p(t,T)dt + \sigma_p(t,T)dw(t)$$

Ito' lemma 를 이용하여 식(1)을 미분한 후에 식(3)과 HJM 의 재정거래부재의 조건을 이용하면 다음의 관계식들을 얻을 수 있다.

$$\sigma_p(t,T) = \int_t^T \sigma_f(t,v)dv \, , \quad (4)$$

$$\gamma(t) = \frac{\mu_p(t,T) - r(t)}{\sigma_p(t,T)} \, . \quad (5)$$

$\gamma(t)$ 식(4)는 무이표채 가격의 변화율의 표준편차는 선도이자율 표준편차의 누적임을 나타내고 있으며, 식(5)는 위에서 언급한 대로 가 무이표채의 가격을 변화시키는 확률변수에 대한 시장위험가격임을 보여주고 있다.

위에서 도출한 선도이자율의 추세항과 분산간의 관계를 이용하면 무이표채의 가격은 다음과 같이 도출된다.

$$P(t,T)=\left[\frac{P(t,T)}{P(0,t)}\right]\exp\left\{\int_t^T\left[\int_0^t\sigma_f(u,s)\sigma_p(u,s)\,du\right]ds\right.$$
$$\left.-\int_t^T\left[\int_0^t\sigma_f(u,s)\left[\gamma(u)du+dw(u)\right]\right]ds\right\}$$

$\gamma(t)$ HJM 의 결과는 선도이자율의 확률과정과 재정거래부재의 조건만을 이용여 도출하였기에 가장 일반적인 모형으로 받아들여지고 있다. 그럼에도 불구하고 HJM 모형은 실증분석에 많이 사용되지 못하고 있다. 우선 재정거래부재 조건을 이용한 대부분의 모형과 마찬가지로 HJM 모형도 관찰불가능한 시장위험가격()에 의존하고 있다. 일반적으로 시장위험가격은 투자자의 효용함수에 의존하기 때문에 측정이 더욱 어려워 진다. 둘째로는 HJM 모형에서 표현된 이자율 기간구조가 마코비안(Markovian) 속성을 갖지 못한다는 것이다. 위 식에서 보는 바와 같이 무이표채의 가격은 과거의 모든 시장위험가격과 선도이자율의 분산에 의존한다. 이러한 비마코비안(non-Markovian) 속성은 이자율의 동태적 변화가 경로의존적(path-dependent)이게 되며, 선도이자율의 모든 역사적 값들에 의존하게 되어 실증적 검증을 어렵게 만든다.

HJM 모형의 실증분석을 용이하게 하기 위하여 많은 연구자들(Caverhill(1994), Hull-White(1993), Ritchken and Sankarasubramanian(1995) 등)이 HJM 모형이 경로비의존적(path-independent)이기 위한 조건을 찾는데 노력하였다. 본 연구에서는 Ritchken and Sankarasubramanian(1995)[RS]의 결과를 활용하고자 한다.

RS 는 무이표채권의 가격이 경로비의존적(path-independent)이기 위해서는 선도이자율의 분산이 다음의 관계를 가져야 함을 보이고 있다.

$$\sigma_f(t,T)=\sigma_r(t)k(t,T)$$

$\sigma_r(t)$ $k(t, T)$ 여기서 는 순간이자율의 분산을 나타내며 는 비확률(deterministic)함수로서 다음과 같은 세미그룹(semi-group)의 속성을 만족해야만 한다.

$$k(t, T) = k(t, u)k(u, T) \qquad \forall u \in (t, T)$$
$$k(u, u) = 1 \qquad \forall u \in [t, T]$$

$\sigma_f(t, T)$ $T$ $k(t, T)$ 특히, 선도이자율의 분산함수()가 만기 에 대해 미분가능한 경우 비확률함수 는 다음과 같은 지수함수로 나타내 질 수 있다.

$$k(t, T) = \exp\left(-\int_t^T \kappa(x)dx\right)$$

$\kappa(x)$ RS 는 선도이자율의 분산함수가 임의의 함수 에 대해 아래 식(6)의 관계를 만족할 경우 이자율기간구조는 두 개의 상태변수를 갖는 마코프과정(Markov Process)으로 표시될 수 있음을 보이고 있다.

$$\sigma_f(t, T) = \sigma_r(t)\exp\left(-\int_t^T \kappa(x)dx\right) \quad (6)$$

이 때 무이표채의 가격은 초기의 무이표채 가격, 초기의 선도이자율, 순간이자율의 함수만으로 다음과 같이 나타내진다.

$$P(t, T) = \left(\frac{P(0, T)}{P(0, t)}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\beta^2(t, T)\Phi(t) + \beta(t, T)[f(0, t) - r(t)]\right\} \quad (7)$$

$\beta(t, T)$ $\Phi(t)$ 여기서 와 는 다음과 같다.

$$\beta(t, T) = -\frac{\sigma_p(t, T)}{\sigma_f(t, T)} = \int_t^T \exp\left(-\int_t^u \kappa(x)dx\right)du \quad (8)$$

$$\Phi(t) = \int_0^t \sigma_f^2(s, t) ds$$

$r(t)$ $\Phi(t)$ 식(7)에서 보는 바와 같이 무이표채권의 가격은 두 개의 상태변수, 즉 순간이자율()과 선도이자율의 누적분산()에 의해 설명되고 있으며 이들의 현재 가치에만 의존하기 때문에 마코비안(Markovian) 속성을 갖게 된다. 따라서 이 두 상태변수의 값을 알면 모든 이자율 기간구조를 알수 있게 된다. RS 는 이 상태변수들에 대해 특정한 확률과정을 가정하여 이자율 기간구조를 구하고 있다.

$\kappa(x)$ $\kappa(x)$ $\kappa$ RS 의 모형을 이용할 경우 에 대해 적당한 함수형태를 가정함으로써 원하는 이자율기간구조 모형을 설정할 수 있다. 본 연구에서는 가장 간단한 예로를 상수 함수()로 가정하여 모형을 추정하고자 한다. 즉, 선도이자율의 변동성에 대해 다음과 같은 형태를 가정한다.

$$\sigma_f(t, T) = \sigma_r(t) k(t, T) = \sigma_r(t) e^{-\kappa(T-t)}$$

$\kappa(x)$ $\kappa(x)$ $\beta(t, T)$ $T-t$ $m$를 상수로 가정한 이유는 무이표채의 가격식이 추정가능한 식으로 풀어질 수 있기 때문이다. 즉, 위 식(8)에서 가 상수이면 는 만기까지의 기간()에만 의존하게 된다. 만기까지의 기간을 이라 하면 채권가격식은 다음과 같이 나타내 진다.

$$P(t, t+m) = \left(\frac{P(0, t+m)}{P(0, t)}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta^2(m)\Phi(t) + \beta(m)\psi(t)\right\} \quad (9)$$

$\beta(m)$ $\Phi(t)$ $\psi(t)$여기서 , , 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\beta(m) \equiv \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa m})$$

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t \sigma_f^2(s, t) ds$$

$$\psi(t) \equiv f(0, t) - r(t)$$

$P(0,t)$ $P(0,t+m)$ $\psi(t)$ $\Phi(t)$ 따라서 이식에 의해 모든 기간수익률은 초기의 기간구조(,)와 두가지 요인(,)에 의해 설명될 수 있다.

## 2. 실증분석 방법

$\kappa$ $\psi(t)$ $\Phi(t)$ $\kappa$ $\psi(t)$ $\Phi(t)$HJM 모형을 이용한 이자율 기간구조의 추정은 모수인 와 두 요인(,)의 추정에 달려 있다. 모수 는 선도이자율과 순간이자율의 표준편차간의 비율로부터 얻어질 수 있다. 따라서 두 요인에 대한 자료를 얻을 수 있으면 모형을 쉽게 추정할 수 있으나 자료의 성격상 간단하지는 않다. 우선 는 초기 선도이자율과 순간이자율의 차이로 구해질 수 있으나 초기에 모든 기간에 대한 선도이자율이 존재해야 하는 문제가 있으며 어떤 이자율을 순간이자율로 간주할 것인가의 문제가 있다. 또한 는 선도이자율의 분산의 누적치이므로 사실상 추정이 불가능하다.

이러한 추정상의 문제를 극복하기 위해 본 연구에서는 Bliss-Ritchken(1996)(BR)에서와 같이 기준이 되는 두 개의 서로 다른 만기 자료를 이용하여 두 요인을 소거하는 방법으로 모형을 추정하고자 한다.

$\psi(t)$ $\Phi(t)$ $y_s(t,t+m)$ $t$ $t+m$ $s$두 요인(,)는 다음과 같은 방법으로 소거되어질 수 있다. 우선 을 시점에서 까지 연속복리로 계산한 시점에서의 연간기준 선도이자율이라 하자. 채권 가격식(9)와 로그(log) 근사관계를 이용하면 선도이자율은 다음과 같이 된다.

$$y_t(t,t+m)m = y_s(t,t+m)m + \beta(m)\psi(t) - \frac{\beta^2(m)}{2}\Phi(t)$$

$y_t(t,t+m)$ $s$ $y_s(t,t+m)$ $\Delta y_t(t,t+m)$ 실제 수익률()과 이전 시점()에서의 선도이자율()과의 차이를 로 나타내면 선도이자율 차이는 다음과 같이 된다.

$$\Delta y_t(t,t+m)m = \beta(m)\psi(t) - \frac{\beta^2(m)}{2}\Phi(t) \quad (10)$$

$\psi(t)$ $\Phi(t)$ $\tau_1$ $\tau_2$이 식에 대해 두 개의 서로 다른 만기수익률 자료를 적용하면 와 를 구할 수 있게 된다. 기준만기를 , 라 하면 각각의 만기에 대해 다음의 두 식이 얻어진다.

$$\Delta y_t(t, t+\tau_1)\tau_1 = \beta(\tau_1)\psi(t) - \frac{\beta^2(\tau_1)}{2}\Phi(t)$$

$$\Delta y_t(t, t+\tau_2)\tau_2 = \beta(\tau_2)\psi(t) - \frac{\beta^2(\tau_2)}{2}\Phi(t)$$

$\psi(t)$ $\Phi(t)$ $\tau_1$ $\tau_2$ $m$ 위의 두 식을 풀면 필요한 두 요인(, )을 구할 수 있다. 따라서 기준이 되는 두 개의 만기(,) 외의 일반적인 만기()에 대해 다음의 식이 성립한다.

$$\Delta y_t(t, t+m)m = \Delta y_t(t, t+\tau_1)H_1(m) + \Delta y_t(t, t+\tau_2)H_2(m) \quad (11)$$

$H_1(m)$ $H_2(m)$여기서 과 은 다음과 같다.

$$H_1(m; \tau_1, \tau_2) = \frac{\tau_1\beta(m)[\beta(\tau_2) - \beta(m)]}{m\beta(\tau_1)[\beta(\tau_2) - \beta(\tau_1)]},$$

$$H_2(m; \tau_1, \tau_2) = \frac{\tau_2\beta(m)[\beta(m) - \beta(\tau_1)]}{m\beta(\tau_2)[\beta(\tau_2) - \beta(\tau_1)]}.$$

따라서 우리 나라의 이자율 기간구조가 HJM 모형에 의해 설명될 수 있는지 여부는 채권수익률 자료가 식(11)을 만족하는지 여부를 검증함으로써 결정될 수 있다.
위 식의 계량적 검증을 위해 수익률 자료에 대해 아래와 같이 관측오차(measurement error)가 존재한다고 가정하자.

$$y_t(t, t+m) = y_t^*(t, t+m) + \varepsilon(t, t+m)$$

$y_t^*(t, t+m)$ $\varepsilon(t, t+m)$ $\sigma_\varepsilon^2$ 은 실제 관측치를 나타내고 은 관측오차를 나타낸다. 관측치들은 동일하고 독립적인 분포(i.i.d.)를 갖는 것으로 가정한다. 관측오차가

평균 0, 분산 의 정규분포를 갖는 것으로 가정하면 최우추정법(maximum likelihood estimation)에 의해 식(11)을 추정할 수 있게 된다.

### 3. 실증분석 결과

#### (1) 자료

식(11)을 실증적으로 검증하기 위해서는 무이표채권의 수익률 자료가 필요하다. 우리 나라의 경우 무이표 국채에는 통안증권과 외평채가 있다. 본 연구에서는 증권업협회에 의해 발표되는 일별 통안증권의 기준수익률을 사용하였다. 통안증권은 3 개월, 6 개월, 9 개월, 12 개월, 18 개월, 24 개월 만기로 구성되어 있으며 6 개 만기 자료가 모두 가능한 1999 년 2 월 10 일부터 2001 년 10 월 10 일까지의 자료를 이용하였다.

<그림 1>은 사용한 기준수익률들의 변화를 예시하고 있다. 표본기간동안 전반적인 만기수익률은 초기에는 상승세를 보였으나 2000 년 대 들어서면서 지속적인 하락세를 나타내고 있다. 만기간에 스프레드는 1999 년 후반부터 벌어지는 양상을 보였으나 2000 년도부터 이자율의 하락세와 함께 스프레드가 줄어들고 있다.

| 만기 | 평균 | 표준편차 | 왜도 | 첨도-3 |
|---|---|---|---|---|
| 3 개월 | 6.26 | 0.72 | -0.88 | -0.07 |
| 6 개월 | 6.66 | 0.96 | -0.47 | -0.76 |
| 9 개월 | 6.91 | 1.11 | -0.27 | -0.93 |
| 12 개월 | 7.07 | 1.19 | -0.20 | -0.95 |
| 18 개월 | 7.35 | 1.26 | -0.28 | -0.91 |
| 24 개월 | 7.50 | 1.29 | -0.34 | -0.86 |

<표 1>은 기초통계량을 보여주고 있다. 평균적으로 기간구조는 우상향하고 있으며 표준편차 또한 만기가 클수록 커지는 양상을 나타내고 있다. 모든 만기에 있어서 왜도가 음인 것을 보면 기간구조는 왼쪽으로 치우쳤음을 알 수 있다. 첨도도 모두 음수로 나타나 정규분포에 비해 평균주변에 덜 집중되어 있는 것으로 나타났다.

선도이자율에 대한 자료는 아래와 같은 관계식을 이용하여 만기별 기준수익률로부터 구하였다.

$$y_s(t, t+m) = \frac{t+m-s}{m} y_s(s, t+m) - \frac{t-s}{m} y_s(s, t)$$

(2) 실증분석 결과

우리 나라 통안채 기준수익률 자료를 이용하여 식(12)를 추정한 결과 추정한 모수의 값은 미국의 경우와 크게 다르지 않으며 설명력에 있어서도 미국의 경우와 비슷한 것으로 나타났다.

$\tau_1, \tau_2$ <표 2>에는 일별자료를 이용하여 추정한 결과가 나타나 있다. 두 요인을 없애기 위해 사용하는 기준 만기()를 다르게 사용하여 추정하였으나 그리 커다란 차이를 보이지는 않고 있다.

$\tau_1$ $\tau_2$ 기준만기는 기간구조의 모양을 반영할 수 있도록 장기와 단기를 사용하는 것이 좋으나 통안채의 경우 만기가 3 개월부터 24 개월에 대해서만 존재하므로 은 3 개월 또는 6 개월을, 는 12 개월 또는 18 개월을 사용하였다.

| 기준만기(개월) | $\kappa$ | S.E. | $\sigma_\varepsilon$ | S.E. | $R^2$(ESS/TSS) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tau_1$=3, $\tau_2$=18 | 1.1079 | 0.0232 | 0.0781 | 0.0013 | 0.972 |
| $\tau_1$=3, $\tau_2$=12 | 1.2057 | 0.0226 | 0.0786 | 0.0012 | 0.973 |
| $\tau_1$=6, $\tau_2$=18 | 1.0090 | 0.0240 | 0.0784 | 0.0013 | 0.971 |
| $\tau_1$=6, $\tau_2$=12 | 1.1214 | 0.0225 | 0.0782 | 0.0012 | 0.958 |

$\kappa$ $\kappa$ $\kappa(s)$ 선도이자율 분산의 변화율을 결정하는 모수인 는 1.0 과 1.2 사이로 추정되었다. 이러한 양의 추정치는 분산의 만기구조가 우하향하는 모양을 나타내 주고 있다. 기존의 연구결과를 보면 Amin-Morton(1994)의 경우는 가 음의 값으로 추정되었으나 Flesaker(1992)와 Bliss-Ritchken(1996)에서는 양의 값으로 추정되고 있다. 분산의 기간구조에 대해서 Heath, Jarrow, Morton and Spindel(1992)은 단조함수(monotonic function)가 아니라 만기가 대체로 짧을

때에는 만기가 커짐에 따라 점차 증가하나 일정 기간 이후부터는 만기에 대해 감소하는 낙타등 모양(volatility hump)을 보이게 된다는 주장을 제기하고 있으나 여기서 사용한 바와 같이 가 상수함수인 경우에는 그러한 모양을 생성할 수 없는 문제점이 존재한다.

$\kappa$ Bliss-Ritchken(1996)에서는 가 0.1 에서 0.4 사이로 추정되고 있는 것과 비교하면 우리 나라의 경우가 우하향하는 기울기가 더 급한 것으로 볼 수 있다.

$\sigma_\varepsilon$관측오차의 표준편차인 에 대해서는 0.07 부근에서 안정적인 추정값을 나타내고 있다. 표준오차도 매우 적어 정확하게 추정되었다고 볼 수 있으며 Bliss-Ritchken(1996)에서도 비슷하게 0.02~0.09 사이로 추정되고 있다.

$R^2$ $R^2$ <표 2>의 마지막 열은 선도이자율 변화의 제곱의 총합계(TSS)와 모델에 의해 설명된 제곱의 합계(ESS)의 비율로 표시한 일종의 값을 보여주고 있다. 네 가지 경우에 있어서 값은 0.95 이상으로 나타나고 있어 모델이 선도이자율 차이를 거의 다 설명한다고 할 수 있다. Bliss-Ritchken(1996)에서도 0.81~0.94 로 높게 나타나고 있는 것을 보면 HJM 모델이 미국의 경우와 같이 우리 나라에 대해서도 설명력이 높은 것을 알 수 있다.

| | $\kappa$ | S.E. | $\sigma_\varepsilon$ | S.E. | $R^2$(ESS/TSS) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1999 | 1.6053 | 0.0523 | 0.1073 | 0.0040 | 0.960 |
| 2000 | 0.8470 | 0.0423 | 0.1327 | 0.0032 | 0.981 |
| 2001 | 0.2375 | 0.0320 | 0.0660 | 0.0018 | 0.995 |
| 현대사태 이전 | 1.5134 | 0.0488 | 0.1121 | 0.0032 | 0.930 |
| 현대사태 이후 | 0.1291 | 0.0419 | 0.0733 | 0.0014 | 0.995 |

$\kappa$ $\kappa$ $\sigma_\varepsilon$<표 3>에는 강건성(robustness)을 위해서 1999 년, 2000 년, 2001 년 자료로 나누어 추정한 결과와 현대사태 전후의 자료를 사용하여 추정한 결과를 보여 주고 있다. 기준만기는 3 개월과 18 개월 선도이자율 차이를 사용하였다. 1999 년 자료만을 이용해 추정한 결과 분산의 기울기를 나타내는 는 모든 자료를 사용했을 때보다 훨씬 크게 추정되고 있으며 관측오차의 분산도 크게 추정되고 있다.

2000 년 자료를 이용한 경우에는 는 작게 추정되고 있으나 은 더 크게 추정되고 있다. 반면 2001 년에는 두 모수에 있어서 전체 자료를 이용한 경우보다 훨씬 작게 나타나고 있다. 이러한 결과는 <그림 1>에서 보듯이 2000 년도에 변동성이 가장 심하고 2001 년도에는 변동성이 급격히 줄어 들뿐 아니라 만기간 격차도 줄어드는 것을 보면 예상할 수 있는 결과라 하겠다. 현대사태를 기준으로 구분한 자료를 이용한 추정결과는 연도별 추정과 동일한 결론을 보여주고 있다.

$R^2$현대사태 이전의 자료를 이용해 추정한 모수는 1999 년의 추정결과와 유사한 값을 나타내고 있으나 변동성이 심한 기간이었기 때문에 는 약간 줄어드는 양상을 나타내고 있다. 반면, 현대사태 이후의 자료를 이용한 추정에서는 기울기가 2001 년의 경우보다 작게 추정되고 있으나 설명력은 비슷하게 나타나고 있다.

| | κ | S.E. | $\sigma_\varepsilon^2$ | S.E. | $R^2$(ESS/TSS) |
|---|---|---|---|---|---|
| 주말 | 1.0919 | 0.0539 | 0.0777 | 0.0030 | 0.972 |
| 주간평균 | 1.1065 | 0.0532 | 0.0746 | 0.0029 | 0.972 |
| 월말 | 1.1273 | 0.0201 | 0.0681 | 0.0010 | 0.976 |
| 월평균 | 1.1579 | 0.0312 | 0.0743 | 0.0011 | 0.976 |

주별자료와 월별자료를 이용한 결과는 <표 4>에 나타나 있다. 주말(월말)자료를 이용한 결과와 주간(월간)평균 자료를 이용한 결과를 모두 제시하였다. 주말자료는 금요일 자료를 사용하였으며 금요일 자료가 없는 경우는 토요일 또는 목요일 자료를 사용하였다. 월말자료는 월별 자료가 있는 마지막 날짜의 자료를 사용하였다.

κ $\sigma_\varepsilon$ $R^2$추정치의 값은 전체 자료를 사용한 경우와 큰 차이를 보이지 않고 있다. 선도이자율 분산함수의 기울기인 는 1.09 와 1.15 사이의 값을 나타내고 있으며 관측오차의 표준편차인 는 0.068 과 0.078 사이의 값으로 추정되고 있다. 모형의 설명력을 나타내는 도 전체 자료의 경우와 비슷하게 0.97 정도의 값을 나타내고 있다.

## IV. 결론 및 시사점

이자율 기간구조는 은행의 VaR 시스템구축을 위해서 뿐만 아니라 채권의 가치평가, 채권투자의 성과평가, 자산-부채 관리, 이자율 예측, 이자율 관련 파생상품의 가격결정 등에 필수 불가결한 정보라 할 수 있다. 본 연구에서는 통화안정증권의 기준수익률을 이용하여 우리 나라의 이자율 기간구조모형을 추정하였다. 선도이자율을 이용하여 기간구조를 추정하는 Heath-Jarrow-Morton 모형의 추정은 현물시장과 선물시장간의 관계를 이해하는 데 도움이 될 수 있으며 양 시장의 효율성을 평가하는 잣대로 활용될 수 있는 이점이 있다.
실증분석 결과 추정된 모수의 값은 미국 재무성증권을 이용하여 추정한 추정치와 크게 다르지 않으며 설명력 면에서도 비슷하게 나타내고 있다. 채권시장의 역사가 짧고 선진국에 비해 충분히 성숙되지 않은 우리 나라의 자료를 이용하여 이자율 기간구조가 지나치게 성공적으로 추정된 결과는 오히려 자료나 추정방법 등에 대한 불신을 유발할 수도 있다. 특히 선물시장이 활성화되지 않은 상태에서 선도 이자율을 이용하는 HJM 모형을 성공적으로 추정한 것은 더욱 그러할 수 있다. 그러나 우리 나라 이자율 기간구조에 대한 연구가 부족한 상황하에서 이자율 기간구조 모형의 추정은 많은 의미를 갖는다. 다양한 방법을 시도하여 가장 합리적 모형을 찾아나가는데 유용한 정보를 제공하는 것으로 본 연구가 의의를 갖는다 하겠다.

## <참고문헌>

김명직, 장국현(2000), "한국 이자율 기간구조 추정 - 통화안정채권의 기준수익률을 중심으로," 「재무연구」, 제 13 권 2 호.
엄영호, 김성현, 오승곤, 최성욱(1999), "산금채 수익률 곡선(yield curve) 추정: 시가평가수익률 자료와 유통수익률 자료를 이용한 비교분석," 「조사연구」, 산업은행, pp. 28-54

오규택, 김명직, 장국현(2000), "국고채이자율 기간구조 : 유통자료를 이용한 실증분석," mimeo

Amin, K. and A. Morton(1994), "Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models," *Journal of Financial Economics* 35, pp. 193-234

Bliss, R. R. and P. Ritchken(1996), "Empirical Tests of Two State-Variable Heath-Jarrow-Morton Models," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 28, No. 3, pp. 452-476

Caverhill, A.(1994), "When Is the Short Rate Markovian?," Mathematical Finance 44, pp. 305-12

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross(1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53, pp. 385-407

Fama E. F. and R. R. Bliss(1992), "The Information in Long-Maturity Forward Rates," *American Economic Review*, 77, pp. 680-692.

Flesaker, B.(1992), "Testing the Heath-Jarrow-Morton/Ho-Lee Model of Interest Rate Contingent Claim Prices," *Journal of Financial and Quantative Analysis*, Vol. 28, No. 4, pp. 483-495

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton(1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," Econometrica, 60, pp. 77-105.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton and M. Spindel(1992), "Easier Done Than Said," *Risk* 5, pp. 77-80.

Hull, J. C. and A. White(1993), "Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices," Advances in Futures and Options Research 6, pp. 1-13

Nelson, C. R. and A. F. Siegel(1987), "Parsimonious Modeling of Yield Curves," Journal of Business, 60, pp.473-489.

Richken, P. and L. Sankarasubramanian(1995), "Volatility Structure of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure," Mathematical Finance 5, pp. 55-72.