# 유한요소 극한해석을 이용한 사각튜브의 축방향 붕괴거동해석

김현섭*, 허 훈 (한국과학기술원)

# Axial Collapse Analysis of Square Tubes using Finite Element Limit Analysis

H. S. Kim, H. Huh (Korea Advanced Institute of Science and Technology)

**Key Words :** : Finite Element Limit Analysis (유한요소 극한해석), Load-carrying capacity (하중지지능력), Collapse behavior (붕괴거동), Square Tube (사각튜브).

## Abstract

This paper is concerned with numerical simulation of plastic collapse behavior of square boxes. The finite element limit analysis program was established using shell element. The simulation incorporates with finite element limit analysis based on the upper bound method and the minimization technique. The simulation is performed with various height to side length ratios (h/b) with fixed thickness to side length ratio (t/b). The numerical simulation results are compared with experiments, and it shows good agreement in collapse load and collapse mode.

## 1. 서론

사각튜브는 자동차 차체 앞부분 등에서와 같이 축방향 하중에 의한 에너지를 흡수 하는 부재로써 사용되어 진다. 사각튜브에 대한 에너지 흡수능력 평가는 여러 가지 방법에 의하여 연구되어 왔는데, 주로 평균 압축하중의 계산 또는 변형 메커니즘의 규명을 위한 연구가 수행되어 왔다[1, 2, 3, 4].

사각튜브와 같은 박판 구조물의 소성 설계와 해석시에는 해석적인 방법과 수치적인 방법이 사용되어진다. 해석적인 방법에 있어서는 구조 요소의 일부분에 국부적인 과도 변형이 발생되는 소성힌지를 통하여 변형 에너지가 소산된다고 가정하여 붕괴하중을 계산한다[5, 6]. 이러한 해석적인 방법은 소성힌지의 발생위치를 적절히 선정하여야 하므로 실험에 통하여 붕괴모드를 파악하고 붕괴하중의 계산을 위한 근사식을 실험결과로부터 유도하여 계산을 수행하게 된다. 따라서 복잡한 구조물의 경우 소성힌지의 위치 결정 및 근사식의 유도에 어려움이 따르게 되므로 수치적인 방법에 의한 붕괴모드 및 붕괴하중의 계산이 필요하다.

탄소성 유한요소법은 매 증분 단계마다 각 적분점에 대하여 응력상태를 판별하여 적분하여야 하고, 계산 단계의 크기(step size)를 작게 해주어야 하므로 계산량이 많아지는 단점이 있다. 또한 탄성에 관한 정보들을 보관하여야 하므로 컴퓨터의 기억용량이 많이 소모된다. 반면, 유한요소 극한해석은 탄성에 의한 변형량은 무시할 만큼 매우 작다는 가정하에 구조물의 내부에 항복이 발생하는 하중을 계산하며, 확장된 개념의 극한해석을 이용하면 변형경화에 따른 재료의 물성치변화를 고려할 수 있다[7]. 또한, 극한해석은 탄소성 해석과는 달리 변형시의 소성에너지를 최소화하는 최소화기법을 통하여 붕괴하중을 구하므로, 최고하중 이후의 해석시에도 특별한 취급없이 계산이 가능하다는 장점이 있어 소성설계를 위한 구조물의 하중지지능력 해석에 매우 유용한 방법이라 할 수 있다. 유한요소 극한해석은 내연적 해석방법으로 소성붕괴하중 및 붕괴모드를 정확히 예측할 수 있으므로, 해석결과로부터 구조물의 하중지지능력 평가와 안전도 검증 등에 유용한 도구가 될 수 있다. 본 연구에서는 정 사각 단면을 가진 사각튜브에 대하여 축방향 압축변형에 대한 하중 및 변형형상을 수치해석을 통하여 계산하고 실험결과와 비교하였다.

## 2. 이론

극한해석의 수식화는 하계해석과 상계해석으로 이루어져 있으며, 하계해석은 정역학적 가용집합과 구성적 가용집합으로부터 해를 구하는 방법으로 평형방정식과 정역학적 경계조건 및 항복조건식들로부터 함수값 또는 매개변수의 최대치와 그에 상응하는 응력분포를 구하게 된다. 즉, 정역학적 가용응력장의 응력과 평형 되는 하중을 구하게 되면 이는 정해하중의 하계를 주게 된다. 하계해석을 수식화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{maximize } q \\ &\text{subject to } \nabla\cdot\sigma = 0 \quad in D \\ &\qquad \sigma\cdot n = qt \quad on \partial D_S \\ &\qquad \|\sigma\|_V \le \sigma_o \quad in D \end{aligned} \tag{1}$$

이때 q 는 비례하중계수이고 t(x,y)는 하중분포식이다. $\|\ \|_V$ 는 von-Mises Norm 을 뜻한다. 하계해석은 이론적으로는 유한차원 근사를 이용하여 수치해석을 수행할 수 있으나, 응력공간에서 해를 구하여야 하므로 비효율적이고 실용적이지 않다. 따라서 체계적인 수치해석이 가능한 상계해석을 이용하는 것이 유리하며, 그 근거는 이원정리(Duality theorem)이다[8, 9].

상계해석의 수식화를 위하여 가상일의 원리를 이용, 평형방정식을 적분방정식 형태로 변환하고 Hölder 부등식정리를 이용하면 다음과 같은 상계수식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \tilde{q} \\ &\text{subject to } \tilde{q} = \overline{\sigma}\int_D \delta\overline{\varepsilon}\, d\Omega \\ &\qquad \int_{\partial D} t\cdot u\, d\Gamma = 1 \\ &\qquad u_{i,i} = 0 \\ &\qquad \text{Kinematic boundary conditions} \end{aligned} \tag{2}$$

상계수식을 유한차원 근사화 된 행렬식으로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \tilde{q}_n \\ &\text{subject to } \tilde{q}_n = \{U\}_n^T[K]_n\{U\}_n \\ &\qquad \{C\}_n^T\{U\}_n = 1 \\ &\qquad \text{Kinematic boundary conditions} \end{aligned} \tag{3}$$

근사화 된 상계수식 (2)는 다음과 같은 구속 이차수학계획법으로 나타내어질 수 있다.

$$\tilde{q}(u) = \sum_{e=1}^{E}\left[\int_{D_e}\overline{\sigma}\,\overline{\varepsilon}\,d\Omega^e + \Lambda\int_{D_e}u_{i,i}^2\,d\Omega^e\right] \tag{4}$$

최소화 기법은 상계범함수의 이승근 부분을 이차 근사하여 반복형태로 만들고 이차수학계획법을 이용하여 범함수의 최소값을 구하는 것이다. 이때, 이차수학계획법에서 라그란지 승수법을 이용하면 구속이차계획법을 비구속 이차계획법으로 변환시킬 수 있고, 반복과정에서의 최소화 수식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \Phi(U) \\ &= \{U\}^T[K]\{U\} - 2\lambda(\{C\}^T\{U\} - 1) \end{aligned} \tag{5}$$

## 3. 수치해석 및 실험결과와의 비교

본 연구에서는 정사각 단면을 가진 사각 튜브에 대하여 축방향 하중에 의한 붕괴거동 해석을 수행하고 실험결과와 비교하였다. 실험에 사용된 사각튜브의 유효응력-변형률 곡선은 그림 1 에 보여진 바와 같다.

사각튜브 단면의 한 변 길이 b 는 40mm, 두께 t 는 1.35mm 이며, 높이 h 는 40mm, 80mm, 120mm 를 사용하였다. 따라서 단면의 한 변 길이 대 높이 비는 각각 1, 2, 3 이 된다. Mahmood 등은 반경험적인 방법을 사용하여, 사각튜브에 있어 축방향 하중에 의한 붕괴모드가 구분되는 임계후폭비를 제시하였다. 본 연구에 사용된 시편의 경우에는 두께 대 한 변 길이의 비 (t / b)가 0.03375 로써 규칙적인 주름이 접히는 정규(compact), 비 신장형(inextensional) 모드이다. 하중에 있어서는 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 1 보다 큰 경우에는 큰 차이를 나타내지 않는 것으로 알려져 있다[3]. 실험은 사각튜브의 위쪽과 아래쪽을 각각 평판과 용접하여 고정시킨 후, 각각의 시편에 대하여 10mm 만큼 축방향으로 압축 변형되도록 실험을 수행하여 하중-변위곡선을 얻었다.

수치해석은 단면의 4 분의 1 만을 모델링하여 유한요소 격자를 구성하였으며, 위쪽과 아래쪽 끝단에 대하여 축방향 변위를 제외한 나머지 자유도를 구속하여 해석하였다. 그림 2 는 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 1 인 경우의 하중-변위곡선으로 수치해석 결과 실험치와 매우 근사한 값이 얻어진 것을 볼 수 있다. 초기의 짧은 구간에서 수치해석 결과가

실험치에 비하여 큰 값을 나타내는 것은 본 연구에서 사용되어진 극한해석의 경우 재료를 강소성으로 가정하여 해석을 수행하였기 때문으로 여겨진다. 그림 3 은 변형된 형상을 나타낸 것으로 실험결과와 수치해석 결과를 비교한 것으로 수치해석 결과 실험결과와 유사한 변형형상이 얻어졌다.

높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 2 인 경우에 있어서는 그림 4 에 보여진 바와 같이 하중값은 매우 근사한 결과가 얻어졌으나, 변형형상에 있어서는 그림 5 에서 볼 수 있듯이 접힘의 발생 위치에 다소 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 이러한 결과는 그림 6 과 7 에서 알 수 있듯이 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 3 인 경우에 있어서도 마찬가지로 나타났음을 알 수 있다. 즉, 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 1 인 경우에는 접힘의 발생 위치가 길이방향으로 중앙부분에서 발생하게 되므로 실험결과와 수치해석 결과가 큰 차이를 보이지 않으나, 그 외의 경우에는 접힘의 발생위치에 있어 다소의 차이를 나타내고 있는 것이다.

일반적으로 사각튜브의 축방향 압축변형을 해석하는 경우, 변형형상의 근사를 위해서 구속조건을 실제의 경우에 비하여 과도하게 부여하는 방법이 사용되어진다. 본 연구에서도 수치해석 모델에 있어 길이방향으로 아래쪽 절반 부분에 대하여 축방향 변위를 제외한 나머지 변위를 구속하여 해석한 경우, 그림 8 에 나타난 바와 같이 실제 실험 결과와 매우 유사한 변형형상을 보였다. 하중에 있어서는 그림 9 에서 알 수 있듯이 위, 아래쪽 끝단 만을 구속한 경우와 큰 차이를 보이지 않았다. 이러한 결과로부터, 본 연구에 있어서는 변형형상의 근사를 위하여 과도한 구속조건을 부여하지 않더라도 사각튜브의 하중지지능력을 매우 근사하게 구할 수 있었으며, 사각튜브와 같은 부재가 사용되는 구조물의 하중지지능력 계산에도 보다 효율적으로 적용될 수 있을 것으로 여겨진다.

**4. 결론**

본 연구에서는 쉘요소를 이용한 유한요소 극한해석 프로그램을 구성하여 사각튜브에 대한 축방향 하중에 의한 붕괴거동해석을 수행하였다. 유한요소 극한해석은 소성에너지를 최소화하는 최소화기법을 통하여 붕괴하중을 구하므로 탄소성해석에 비하여 계산효율이 뛰어나며, 구조물의 하중지지능력을 계산하는 경우에 유용한 방법이라 할 수 있다.

수치해석 결과, 실험에서 얻어진 하중값과 변형형상에 있어 매우 근사한 결과를 얻을 수 있었으며, 사각튜브와 같은 구조 부재의 하중지지능력 계산뿐만 아니라 자동차 등과 같은 구조물의 안전성 확보를 위한 해석에 효율적으로 적용될 수 있을 것으로 여겨진다.

**참고문헌**


1. Wierzbicki, T. and Abramowicz, W., “On the Crushing Mechanics of Thin-walled Structures”, ASME J. Appl. Mech., Vol. 50, No. 4, pp.727-734, 1983.
2. Wierzbicki, T. and Abramowicz, “Stress-Profiles in Thin-walled Prismatic Columns subjected to Crush Loading-Compression”, Comput. & Struct., Vol. 6, pp.611-623, 1994.
3. Mahmood, H. F. and Paluszny, A., “Design of Thin Walled Columns for Crash Energy Management-Their Strength and Mode of Collapse”, SAE 811302, pp. 4039-4050, 1981.
4. Magee, C. L. and Thornton P. H., “Design Consideration in Energy Absorption by Structural Collapse”, SAE 780434, pp. 2041-2055, 1978.
5. Nikravesh, P. E. and Chung, I. S., Structural Collapse and Vehicular Crash Simulation using a Plastic Hinge Technique. J. Struct. Mech., Vol. 12, No. 3, pp.371-400, 1984.
6. 강성종, "소성힌지를 갖는 단순 보 모델을 이용한 루프 붕괴 해석기술", 한국자동차공학회 논문집, Vol. 4, No. 6, pp. 216-222, 1996.
7. Kim, H. S. and Huh, H., “Vehicle Strcutural Collapse Analysis using a Finite Element Limit Method”, Int. J. Veh. Des. , (accepted)
8. H. Huh and W. H. Yang, ”A General Algorithm for Limit Solutions for Plane Stress Problems”, Int. J. Solids Structures, Vol. 28, pp. 727-738, 1991.
9. Yang, W. H., “Large Deformation of Structures by Sequential Limit Analysis”, Int. J. Solids Structures Vol. 30, No. 7, pp.1001-1013, 1991.

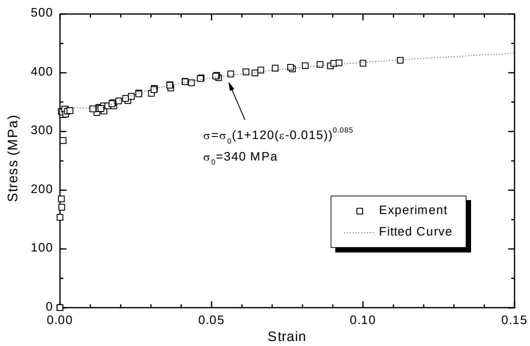



그림 1.  사각튜브의 유효응력-변형률 곡선

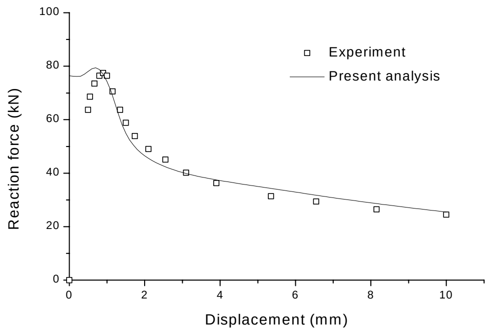
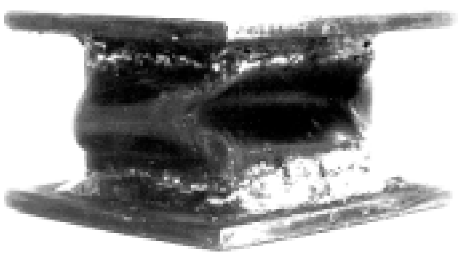
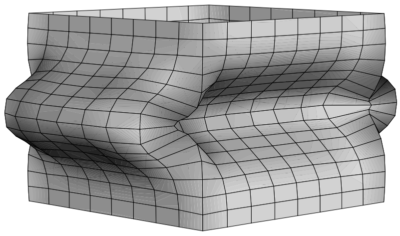



그림 2. 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 1 인 경우 사각튜브의 하중-변위 곡선



(a)



(b)

그림 3. 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 1 인 경우, 변위가 10mm 일때의 사각튜브의 변형형상
(a) 실험결과,  (b) 수치해석 결과

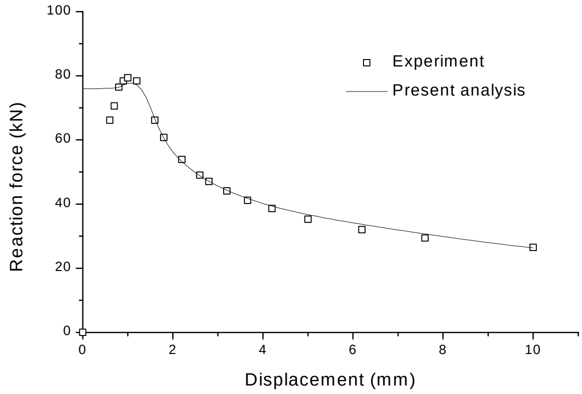
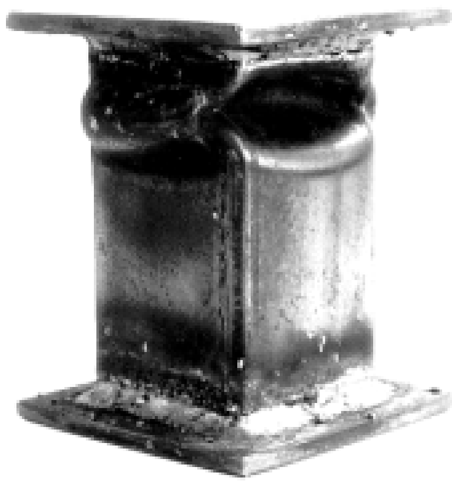
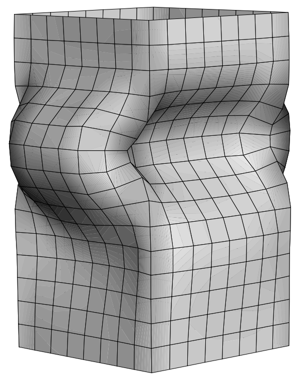



그림 4. 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b) 가 2 인 경우 사각튜브의 하중-변위 곡선



(a)



(b)

그림 5. 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 2 인 경우, 변위가 10mm 일때의 사각튜브의 변형형상
(a) 실험결과,  (b) 수치해석 결과

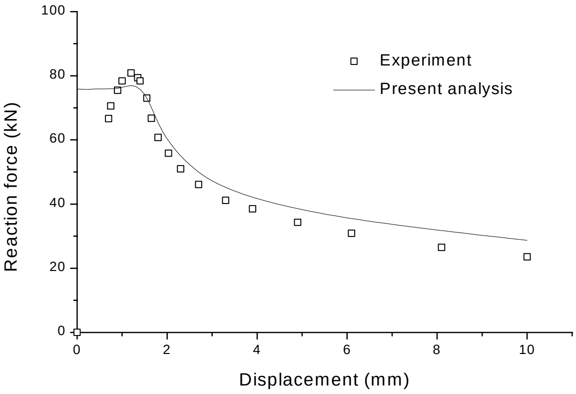
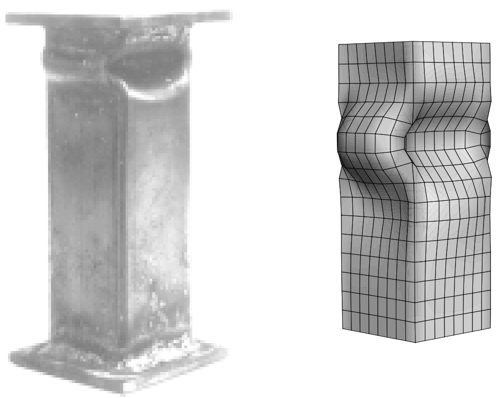



그림 6. 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 3 인 경우 사각튜브의 하중-변위 곡선



(a) (b)

그림 7. 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 3 인 경우, 변위가 10mm 일때의 사각튜브의 변형형상
(a) 실험결과, (b) 수치해석 결과

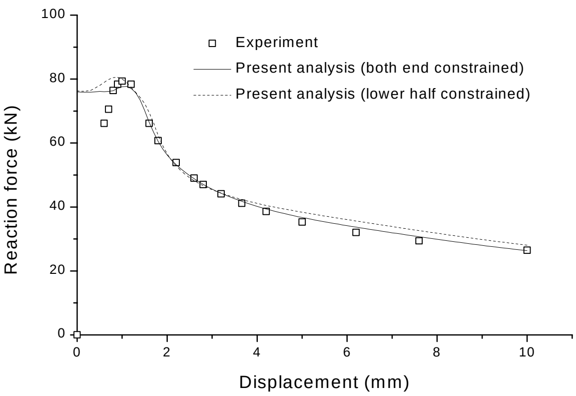



그림 8. 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 2 인 경우 사각튜브의 하중-변위 곡선 (길이방향의 절반을 구속한 경우)

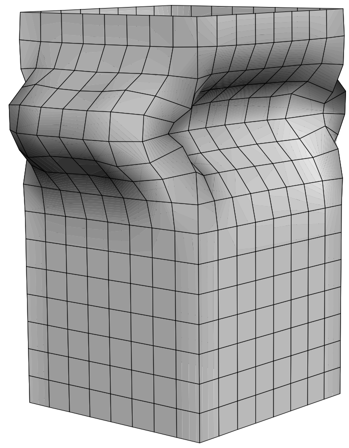


그림 9. 높이 대 단면의 한 변 길이 비(h / b)가 2 인 경우, 변위가 10mm 일때의 사각튜브의 변형형상 (길이방향의 절반을 구속한 경우)