

민감도 행렬의 정확도가 경계온도 추정에 미치는 영향

김기완* · 백승욱**†

The effect of the accuracy of sensitivity matrix on a boundary temperature estimation

Ki Wan Kim and Seung Wook Baek

ABSTRACT

Inverse radiation problems are solved for estimating boundary temperature distribution in a way of function estimation approach in an axisymmetric absorbing, emitting and scattering medium, given the measured radiative data. In order to investigate the effect of sensitivity matrix on the estimation accuracy, various sensitivity calculators such as finite-difference approximation, automatic differentiation and Broyden combined update were adopted, and compared their accuracy and computational efficiency. Furthermore, the effects of the number of measurement points and measurement error on the estimation accuracy have been inspected. Total three inverse methods of Quasi-Newton method, conjugate-gradient method and Levenberg-Marquardt method are utilized as a iterative regularization technique for the validation of inverse solution in this process.

Key Words : Inverse radiation boundary analysis, Automatic differentiation, Broyden combined update, Conjugate-gradient method, Levenberg-Marquardt method

기 호 설 명

I	복사강도	위첨자
I_b	흑체복사강도	k 반복회수
nm	측정지점 개수	그리스 문자
np	추정 파라미터 개수	ϵ_i 표면 i 의 방사율
P	추정 파라미터 벡터	κ_a 흡수계수
q	입사 복사 열유속	σ_s 산란계수
T_i	표면 i 의 경계온도	σ_{st} 측정값의 표준편차
T_g	내부 매질의 온도	Φ 산란위상함수
X	민감도 행렬	ζ 표준정규분포 확률변수

1. 서 론

역열해석(inverse thermal analysis)은 재진입 우주선의 표면 온도나 대기의 원격 탐사와 같이

직접적으로 측정하기 어려운 물성치를 추정하는데 주로 적용되어 왔다 [1]. 그중에서 역복사 해석은 온도 또는 복사측정값을 가지고 복사 물성치들을 추정하는 것으로, 축대칭 형상에서의 역복사해석은 매질 내부의 온도 분포나 복사 물리량을 추정하는데 적용되어 왔다 [2-3]. Li는 밖으로 향하는 복사강도를 측정하여, 매질 내부의 생성항 분포를 추정하였고[2], Ou와 Wu는 복사 강도 측정값을 가지고 소멸 계수 분포, 산란 알베

* KAIST 대학원 항공우주공학전공

** KAIST 항공우주공학전공

† 연락처, swbaek@kaist.ac.kr

도, 그리고, 산란위상함수 등 다양한 복사 물리량을 동시에 추정하였다 [3]. 이제까지 역복사해석은 주로 파라미터 추정방식으로 이루어져왔다. 즉, 추정할 파라미터의 분포, 즉 함수 형태를 미리 알고 있다고 가정하고 함수의 계수들을 추정하였다. 하지만, 실제로 함수의 형태를 미리 알 수 없기 때문에 최근 역전도해석에서는 함수 추정방식에 대한 연구가 주를 이루고 있다 [4]. 함수 추정방식은 함수의 형태를 알지 못한다는 가정하에 설계 범위안에서 무한개의 파라미터에 대한 함수값들을 찾아가는 방식이다.

역해석으로 구한 해들은 측정오차에 매우 민감하여 그 값들이 진동을 보이고 불안정해지면서 엄밀해를 찾지 못하는 ill-posed 특성을 가진다. 이를 극복하기 위하여 다양한 역기법들이 적용되어 왔는데, 반복 조정법의 하나로 최적기법들이 사용되고 있다. 최적기법은 공역구배법이나 준뉴턴법과 같은 기울기 기반 기법과 유전알고리즘과 같은 탐색적 기법으로 나뉘는데, 기울기 기반 기법은 기울기 정보를 이용하여 최적값을 찾아가는 방식으로 정확한 값을 추정하지만, 초기값의 영향을 많이 받고 국소 최적값(local optimum)에 빠지는 단점을 가지고 있다. 또한, 기울기 정보를 구하기 위해 민감도 문제나 부가 문제를 별도로 풀어야 한다 [5]. 이에 비해 탐색적 기법은 기울기 기반 기법들의 문제점들에 대한 대안이 될 수 있지만, 계산 시간이 많이 걸리는 단점이 있다 [6]. 그러므로 파라미터의 개수가 많은 함수 추정 문제에서는 기울기 기반 기법들이 사용된다.

파라미터 추정과 달리 함수 추정방식은 추정해야 하는 파라미터의 수가 매우 많기 때문에, 기울기 방식의 조정법을 사용할 경우, 기울기 정보를 계산하는데 걸리는 시간을 줄이는 것이 중요한 연구 대상이 된다. 기울기 정보, 즉 민감도 계수를 계산하는 방식으로 유한차분법(finite-difference method)을 들 수 있다. 유한차분법은 프로그래밍 하는 게 쉬운 반면, 미지수의 개수에 1을 더한 수만큼 함수값을 계산하고 이 값으로 민감도 계수를 계산하기 때문에 추정 파라미터의 개수에 비례하여 계산 시간이 증가한다. 또한, 라그랑지 계수를 도입하여 부가문제를 유도하고 민감도 문제와 부가문제를 푸는 과정에서 민감도 계수 값을 구하는 방법이 있다 [5]. 이 방법은 공역구배법과 함께 사용되며 파라미터의 수에 관계없이 민감도 문제(sensitivity problem)와 부가문제(adjoint problem)를 한번 풀어서 민감도 계수를 구하기 때문에 계산시간이 단축되는 이점이 있으나 추정 파라미터가 여러 지배방정식과 연결이 되어 있는 경우 부가문제를 유도하는 것이 상당히 복잡해진다. 자동 미분법 (automatic differentiation)은 최근 들어 주목을 받고 있는

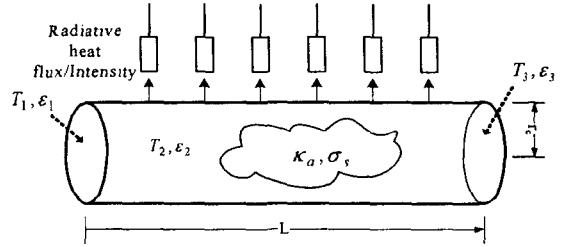


Fig.1 Schematic of the physical system

방식으로 연쇄법칙(chain rule)을 이용하여 비교적 짧은 시간에 민감도 값을 계산하며, 목적함수의 형태에 영향을 받지 않고, 부가 문제 등을 따로 유도할 필요가 없다. 마지막으로, 기울기 값을 과거의 함수값과 현재의 함수값으로 근사하는 시컨드 방법의 하나로 연립방정식에서 안정적인 결과를 보여주는 Broyden 혼합기법이 있다. 이 방법은 민감도 계수를 계산하기 위해 따로 함수값을 계산하지 않고, 간단한 대수 연산(algebraic operation) 만을 이용하기 때문에 계산 시간이 거의 소요되지 않는다.

본 연구에서는 흡수, 방사, 산란하는 축대칭 형상 매질에서 밖으로 향하는 복사 물성치를 측정하여, 그 값을 가지고 함수 추정 방식으로 경계 온도를 추정하려 한다. 앞서 언급한 다양한 민감도 기법을 사용하여 민감도 기법들의 정확성과 효율성 등을 비교 검토하려 한다. 또한, 민감도 계수의 정확도 및 측정 데이터의 개수, 측정 오차 등이 함수 추정의 정확성에 미치는 영향을 살펴보고자 한다. 역기법으로 구한 해들을 검증하기 위해서 다양한 역기법들, 즉, 준뉴턴법과 공역구배법, Levenberg-Marquardt 법을 사용하여 그 결과를 비교하였다.

2. 이론 해석

2.1 직접 문제

2.1.1 문제 정의

Fig. 1은 흡수, 방사, 산란하는 회체 매질로 차여져 있는 축대칭 형상을 보여준다. 매질의 흡수 및 산란 계수는 모두 0.5 m^{-1} 이고, 온도는 1000K이다. 길이와 반경은 각각 4m 와 1m 이고, 모든 벽은 확산적으로 방사 및 반사한다. 모든 벽면의 방사율은 0.8이고, 벽면 1과 3의 온도는 각각 600K과 800K 이다. 벽면 2의 온도는 미지수이며, 복사열유속이나 복사 강도의 측정값을 가지고 추정될 것이다. 복사 강도의 정확한 계산을 위해 공간 및 각도를 각각 20×50 의 검사체적과 8×14 의 검사각도로 이산화 하였다. 밖으로 향하는 열유속은 벽면 2의 경계조건이 임의로 주어졌

을 때 유한체적법으로 벽면에서의 복사강도를 구하고, 이를 밖으로 향하는 모든 검사각도에 대하여 적분하여 계산하였다. 벽면 2의 온도를 추정하는데 1000K의 상수함수와 사인형태 함수를 고려하였다.

2.1.2 복사전달 방정식

앞장에서 설명한 흡수 및 방사, 산란하는 매질 내부의 임의의 위치 및 방향에 대한 복사강도는 다음의 복사전달방정식에 의해 지배받는다.

$$\frac{dI(\vec{r}, \hat{s})}{ds} = \beta_o(\vec{r})I(\vec{r}, \hat{s}) = S_r(\vec{r}, \hat{s}) \tag{1}$$

여기서, $\beta_o(\vec{r}) = \kappa_a(\vec{r}) + \sigma_s(\vec{r})$ 이고,

$$S_r(\vec{r}, \hat{s}) = \kappa_a(\vec{r})I_b(\vec{r}) + \frac{\sigma_s(\vec{r})}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi(\hat{s}', \hat{s})I(\vec{r}, \hat{s}')d\Omega'$$

위상함수는 Legendre 다항식으로 다음과 같이 근사된다.

$$\Phi(\hat{s}', \hat{s}) = \Phi(\cos\Psi) = \sum_{j=0}^J C_j P_j(\cos\Psi) \tag{2}$$

여기서, Ψ 는 입사방향, \vec{s}' 와 산란방향, \vec{s} 사이의 산란각이며, C_j 는 팽창계수이다.

한편, 확산적으로 방사 및 반사하는 벽면을 떠나는 복사강도는 다음의 식처럼 방사 및 반사된 복사 강도의 합으로 표현된다. 즉,

$$I(\vec{r}_w, \hat{s}) = \epsilon_w(\vec{r}_w)I_b(\vec{r}_w) + \frac{1 - \epsilon_w(\vec{r}_w)}{\pi} \int_{\hat{s} \cdot \vec{n}_w < 0} I(\vec{r}_w, \hat{s}')|\hat{s}' \cdot \vec{n}_w|d\Omega' \tag{3}$$

밖으로 향하는 복사 열유속은 밖으로 향하는 모든 검사각도에 대하여 복사 강도를 적분하여 계산하였다.

$$q_e = \int_{\hat{s} \cdot \vec{n}_w < 0} I(\vec{r}_w, \hat{s})|\hat{s} \cdot \vec{n}_w|d\Omega \tag{4}$$

위의 복사전달방정식을 축대칭형상에 적용하기 위해서 유한체적법을 이용한 Chui의 방법을 채택하였다 [7].

2.2 역해석 기법

2.2.1 공액구배법 (conjugate-gradient method)

역해석에서 가장 많이 사용되는 기법으로 상당히 안정적이고 강건한 기법으로 알려져 있다. 기울기 정보를 이용하여 지역 최적값을 찾아가는데, 과거의 기울기 정보를 함께 이용함으로써 최급강화법(steepest descending method)보다 더 빨리 최적값을 찾아간다. 이 방법은 다음과 같이 반복 계산을 통해 더 나은 값을 찾아간다 [5].

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k - \beta^k \mathbf{d}^k \tag{5}$$

여기서, β 와 d 는 각각 이동 거리와 방향을 나타내며, 이동 방향은 다음과 같이 구한다.

$$\mathbf{d}^k = \nabla S(\mathbf{P}^k) + \gamma^k \mathbf{d}^{k-1} \tag{6}$$

여기서, 공액 상수는 다음과 같이 구하게 된다.

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^{nm} [\nabla S(\mathbf{P}^k)]_j^2}{\sum_{j=1}^{nm} [\nabla S(\mathbf{P}^{k-1})]_j^2} \tag{7}$$

첫 번째 반복에서는 $\gamma^0 = 0$ 이 된다.

식 (7)의 공액 상수를 구하기 위해서는 목적함수의 파라미터에 대한 일차 미분값이 필요한데, 만약 측정값이 복사 열유속이라면 목적함수와 미분값이 다음과 같이 표현된다.

$$S(\mathbf{P}^k) = \sum_{i=1}^{nm} (q_{m,i} - q_{e,i}(\mathbf{P}^k))^2 \tag{8}$$

$$[\nabla S(\mathbf{P}^k)]_j = -2 \sum_{i=1}^{nm} X_{j,i} [q_{m,i} - q_{e,i}(\mathbf{P}^k)] \tag{9}$$

여기서, \mathbf{X} 는 파라미터에 대한 복사열유속의 일차 미분값인 민감도 계수로 구성되는 민감도 벡터이며 다음과 같이 정의된다.

$$X_{j,i} = \frac{\partial q_{e,i}(\mathbf{P}^k)}{\partial P_j} \tag{10}$$

마지막으로, 식 (5)에서의 이동거리는 식 (9)를 이동거리 β 에 대해 최소화하는 값으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\beta^k = \frac{\sum_{i=1}^{nm} \left(\sum_{j=1}^{np} X_{j,i} d_j^k \right) [q_{e,i}(\mathbf{P}^k) - q_{m,i}]}{\sum_{i=1}^{nm} \left(\sum_{j=1}^{np} X_{j,i} d_j^k \right)^2} \tag{11}$$

2.2.2 준뉴턴법 (quasi-Newton method)

미지수의 개수와 방정식의 개수가 같을 때 연립방정식을 풀기 위한 다양한 방법이 알려져 있으며 특히 뉴턴법은 빠른 수렴성을 보인다. 뉴턴법에서 2차 미분항을 무시한 형태를 준뉴턴법이라 하며 기울기값을 구하는 방법이나 무시한 2차 미분항에 대한 보정 방법에 따라서 다양한 방법들이 존재한다 [8].

준뉴턴법을 본 연구에 적용하기 위해서 먼저 식(8)을 다음과 같이 연립방정식의 형태로 만들 수 있다.

$$S_i(\mathbf{P}) = q_{e,i}(\mathbf{P}) - q_{m,i} \quad \text{for } i = 1, \dots, nm \tag{12}$$

파라미터 \mathbf{P} 는 \mathbf{S} 를 테일러 전개했을 때 그 값을 0으로 만드는 값으로 다음과 같이 관계식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{S}(\mathbf{P}) \cong \mathbf{S}_0(\mathbf{P}^0) + \nabla \mathbf{S}(\mathbf{P})(\mathbf{P} - \mathbf{P}^0) = 0 \tag{13}$$

여기서, $\nabla \mathbf{S}(\mathbf{P}) = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}}$ 는 식 (10)에서 정의한 민감도 계수이다.

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k - (\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{P}^k) \tag{14}$$

식 (14)식은 미지수와 방정식의 개수가 같은 경우에 적용가능하며, 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 클 경우 다음과 같이 바꾸어 적용한다.

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k - [(\mathbf{X}^k)^T \mathbf{X}^k]^{-1} (\mathbf{X}^k)^T \mathbf{S}(\mathbf{P}^k) \quad (15)$$

2.2.3 Levenberg-Marquardt 법

역문제의 해들은 측정오차에 영향을 많이 받기 때문에 이러한 영향을 줄여주는 조치가 필요하다. Levenberg-Marquardt법은 준뉴턴법에 감쇠항(damping term), $\mu\Omega$ 을 추가하여 측정오차로 인한 영향을 줄인다. 즉,

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k - [(\mathbf{X}^k)^T \mathbf{X}^k + \mu^k \Omega^k]^{-1} (\mathbf{X}^k)^T \mathbf{S}(\mathbf{P}^k) \quad (16)$$

여기서, μ 는 감쇠파라미터이고, Ω 는 대각행렬로서 다양한 값들이 사용되지만, 본 연구에서는 다음의 식을 사용하였다 [5].

$$\Omega^k = \text{diag}[(\mathbf{X}^k)^T \mathbf{X}^k] \quad (17)$$

2.3 민감도 기법

기울기 기반의 기법들은 모두 식 (10)에서 정의한 민감도 계수를 사용하여 해들을 찾아간다. 이 계수들을 계산하는 기법들을 민감도 기법이라고 하고 본 연구에 사용된 방법들을 설명하고자 한다.

2.3.1 유한차분법 (finite-difference approximation)

가장 기본이 되는 방법으로 기울기 값들을 계산하기위해 별개의 문제를 유도하여 풀 필요가 없으며 프로그램화의 용이성이 장점이지만 파라미터 개수에 비례하여 계산 시간이 증가하는 단점이 있다. 본 연구에는 다음 식과 같이 차분하여 기울기 값을 계산하였다.

$$\frac{\partial q_{e,i}}{\partial P_j} \cong \frac{q_{e,i}(P_1, \dots, P_i + \varepsilon P_i, \dots, P_{np}) - q_{e,i}(P_1, \dots, P_i, \dots, P_{np})}{\varepsilon P_j} \quad (18)$$

for $i = 1, \dots, nm$ and $j = 1, \dots, np$

2.3.2 자동미분법 (automatic differentiation)

자동 미분법은 미분하려는 식을 모두 기본적인 연산만 존재하는 식들로 세분화하여 쪼개고, 이 식들에 연쇄법칙을 적용하여 기울기 값을 계산하게 된다. 만약 함수 $f(x,t) = (x+t)(x^2+2tx+t)$ 를 x 와 t 에 대하여 미분을 한다고 하면, 표 1과 같이 기본연산만을 포함하는 식들로 쪼갤 수 있다. 이 식들을 전미분 형태로 미분해 나가면 표 2와 같은 미분 결과를 얻을 수 있으며 이러한 과정을 일반적인 식으로 표현하면 다음과 같다.

Table 1 Code list for example function f

Code event	Corresponding function form
$e_1 = x$	x
$e_2 = t$	t
$e_3 = e_1 + e_2$	$x + t$
$e_4 = e_1 \times e_1$	x^2
$e_5 = 2 \times e_1 \times e_2$	$2tx$
$e_6 = e_4 + e_5$	$x^2 + 2tx$
$e_7 = e_2 + e_6$	$x^2 + 2tx + t$
$e_8 = e_3 \times e_7$	$(x+t)(x^2 + 2tx + t)$

Table 2 Differentiated code list

Differentiated code list	x에 대한 미분 $\nabla e_1 = 1$ $\nabla e_2 = 0$	t에 대한 미분 $\nabla e_1 = 0$ $\nabla e_2 = 1$
$\nabla e_3 = \nabla e_1 + \nabla e_2$	1	1
$\nabla e_4 = 2e_1 \nabla e_1$	2x	0
$\nabla e_5 = 2e_1 \nabla e_2$ $+ 2e_2 \nabla e_1$	2t	2x
$\nabla e_6 = \nabla e_4 + \nabla e_5$	2x + 2t	2x
$\nabla e_7 = \nabla e_2 + \nabla e_6$	2x + 2t	2x + 1
$\nabla e_8 = e_3 \nabla e_7$ $+ e_7 \nabla e_3$	$(x^2 + 2tx + t)$ $+ (x+t)(2x + 2t)$	$(x^2 + 2tx + t)$ $+ (x+t)(2x + 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial e_j} = \sum_{k=j+1}^N \frac{\partial f}{\partial e_k} \frac{\partial e_k}{\partial e_j}, \quad j = 1, \dots, J \quad (19)$$

여기서, e 는 세분화한 식을 나타내고, J 와 N 은 각각 독립변수와 세분화한 식의 개수이다.

본 연구에서는 학문적 목적으로 무상 제공되는 ADIfor 을 사용하였다 [9].

2.3.3 Broyden 혼합법 (broyden combined method)

시컨트법(secant method)는 평균미분값을 구하는 것으로 전 반복회수에서 구한 함수값과 현재 반복회수에서 구한 함수값을 가지고 미분값을 계산하기 때문에 아주 짧은 시간에 미분계산이 가능하다. Broyden 법은 시컨트법의 일종으로 특히 독립변수의 개수가 많을 때 사용된다.

특히, Broyden 혼합법은 Broyden good method (BGM)과 bad method(BBM)을 선택기준에 맞게 혼합하여 사용하는 방법으로 BGM과 BBM을 따로 사용했을 때보다 더 좋은 안정성을 보여주었다 [10].

$$\text{BGM} : \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \frac{(\mathbf{y}_k - \mathbf{X}_k \Delta_k) \Delta_k^T}{\Delta_k^T \Delta_k} \quad (20)$$

$$\text{BBM} : \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \frac{(\mathbf{y}_k - \mathbf{X}_k \Delta_k) \mathbf{y}_k^T \mathbf{X}_k}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{X}_k \Delta_k} \quad (21)$$

여기서, $\mathbf{y}_k = \mathbf{S}(\mathbf{P}^{k+1}) - \mathbf{S}(\mathbf{P}^k)$ 로 전 반복회수와 현재 반복회수에서의 함수값의 차이이며, Δ_k 는 식 (15)에서 $\Delta_k = -[(\mathbf{X}^k)^T \mathbf{X}^k]^{-1} (\mathbf{X}^k)^T \mathbf{S}(\mathbf{P}^k)$ 에 해당하는 값이다.

선택기준은 다음의 식을 만족하면 BGM, 그렇지 않은 경우는 BBM을 사용하며, 첫 번째 반복회수에서의 \mathbf{X}_0 는 유한차분법이나 자동미분법등을 이용하여 제공되어야 한다.

$$\frac{|\Delta_k^T \Delta_{k-1}|}{|\Delta_k^T (\mathbf{X}_k)^{-1} \mathbf{y}_k|} < \frac{|\mathbf{y}_k^T \mathbf{y}_{k-1}|}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{y}_k} \quad (22)$$

2.4 역해석 절차

추정하고자 하는 온도 분포를 제외한 모든 물성치들의 값들을 알고 있다고 가정한 상태에서, 측정된 복사강도 및 복사열유속으로 온도분포를 추정하였다. 측정 데이터는 앞에서 언급한 2가지 테스트 함수를 가지고 직접문제를 풀어 얻었고, 역해석에서는 이러한 측정 데이터를 가지고 역으로 테스트 함수를 추정하게 된다. 한편 본 연구에서 사용된 수렴조건은 다음과 같다. 먼저, 측정 데이터에 오차가 없는 경우는 목적함수, 즉, 식 (8)과 (12)의 값이 10^{-6} 보다 작으면 모든 절차를 멈추고, 오차가 있는 경우는 역해석의 해에 진동(oscillation)이 발생하는 것을 막기 위해 목적함수의 값이 $nm \times \sigma_{st}$ 보다 작으면 수렴한 것으로 판단하였다 [5].

3. 결과 및 고찰

3.1 민감도 기법의 정확도

먼저 여러 민감도 기법으로 구한 민감도 계수들의 정확도 및 계산 시간을 비교하였다. 먼저, 첫 번째 테스트 함수인 상수 함수에 대해서 반복회수, $k=1$,에서 유한차분법 (FD, $\epsilon=10^{-6}$)과 자동미분법(AD)으로 민감도 계수를 구하고, 첫 번째 파라미터, P_1 의 관측값에 대한 민감도 계수를 5개만 표 3에 나타내었다. 유한차분법과 자동미분법이 거의 같은 민감도 계수를 계산하지만, 계산 시간은 자동미분법이 약 2배 정도 짧음을 알 수 있었다. 반복회수, $k=2$,에서 유한 차분법과 자동미분법, Broyden 혼합법 (BC)의 계산 결과를 비교하였는데, 첫 번째 반복회수에서의 자동미분법의 값을 \mathbf{X}_0 로 하였고, 그 결과는 표 4에 나타내었다. Broyden 혼합법의 결과는 FD나 BC의 결과와는 큰 차이를 보였는데, 이는 Broyden 혼합법이 순간변화율이 아닌 평균변화율을 구하

Table 3 Sensitivity coefficients and computational time for FD and AD

j	$\partial q_{e,i} / \partial P_j, j = 1, \dots, 5$	
	FD	AD
1	7225.96	7225.95
2	4588.74	4588.78
3	3948.58	3948.62
4	3370.99	3371.03
5	2807.63	2807.67
CPU time (sec)	104.2	65.5

Table 4 Sensitivity coefficients and computational time for FD, AD and BC

j	$\partial q_{e,i} / \partial P_j, j = 1, \dots, 5$		
	FD	AD	BC
1	10455.12	10455.11	7163.19
2	6639.37	6639.43	4542.92
3	5713.13	5713.20	3920.97
4	4877.43	4877.49	3362.51
5	4062.31	4062.37	2818.33
CPU time (sec)	124.09	78.09	0.0025

기 때문이다. 하지만, 계산 시간은 거의 필요치 않았다.

3.2 민감도 계수의 정확도가 추정의 정확도에 미치는 영향

준뉴튼법(QNM)을 역해석 기법으로, 자동미분법과 Broyden 혼합법을 민감도 기법으로 사용하여 테스트 함수 2의 경우에 대하여 역해석을 수행하고 민감도 계수의 정확도가 경계온도 추정에 미치는 영향을 살펴보았다.

먼저 추정오차를 고려하지 않았을 때, Fig. 2의 결과와 같이 자동미분법과 Broyden 혼합법 모두 경계온도를 정확히 추정하였다. 수렴에 걸린 계산 시간과 반복회수를 표 5에 열거하였는데, Broyden 혼합법으로 구한 민감도 계수의 정확성이 자동미분법의 결과보다 부족하기 때문에 약 5배 정도의 반복회수가 필요하지만, 총 계산 시간은 더 적게 소요됨을 알 수 있었다.

일반적으로 측정값에는 측정오차를 포함하고 있기 때문에 이를 고려하기 위하여 다음의 관계식을 통해 일정한 표준편차를 가지는 측정값을 모사(simulation)하였다.

$$q_{error,i} = q_{exact,i} + \sigma_{st} \zeta \quad i = 1, \dots, nm \quad (23)$$

총 2종류, 즉, $\sigma_{st} = 50$ 과 100의 표준 편차를 고려하였는데, 이는 표준 상태 측정 오차 0.35%와

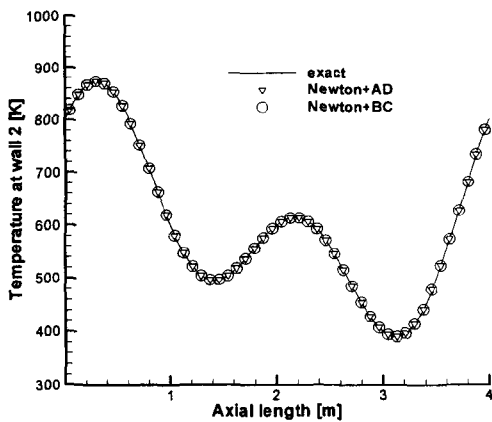


Fig. 2 Estimated temperature distribution with QNM+AD and QNM+BC for test function 2 in no measurement error case

Table 5 Comparison of iteration number and computational time for QNM+AD and QNM+BC

Test function	QNM+BC		QNM+AD	
	Iter. no.	CPU(sec)	Iter. no.	CPU(sec)
2	33	134.37	7	212.34

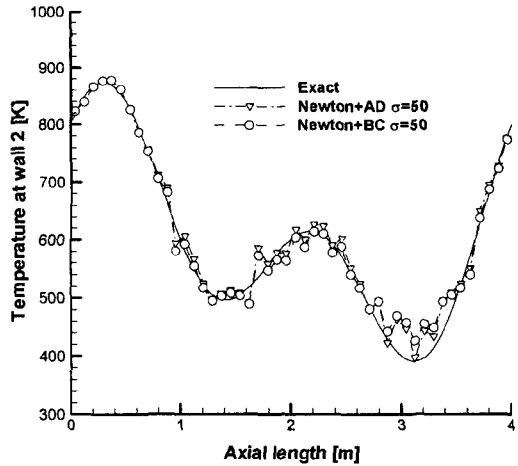
0.71%에 해당하는 값이다. 측정오차를 고려하여 역해석을 수행하자 해를 구하지 못하고 발산하였다. 이 문제를 해결하기 위하여 측정값의 개수를 2배 늘렸는데, 측정값을 복사 열유속에서 복사강도로 바꾸고, 같은 측정지점에서 바로 옆에 이웃하는 방위각에서의 복사강도를 추가하였다. 이러한 측정값을 가지고 역해석을 수행하고 그 결과를 Fig. 3과 4에 도시하였다. 기울기가 급격히 변하는 지점에서 진동현상이 발생하고 측정오차가 클수록 역해석의 해가 부정확해짐을 알 수 있었다. 좀 더 자세한 고찰을 위해 다음과 같이 추정상대오차를 정의하였다.

$$\epsilon_{RE} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{nm} \left| \frac{T_{est,i} - T_{ex,i}}{T_{ex,i}} \right| \quad (24)$$

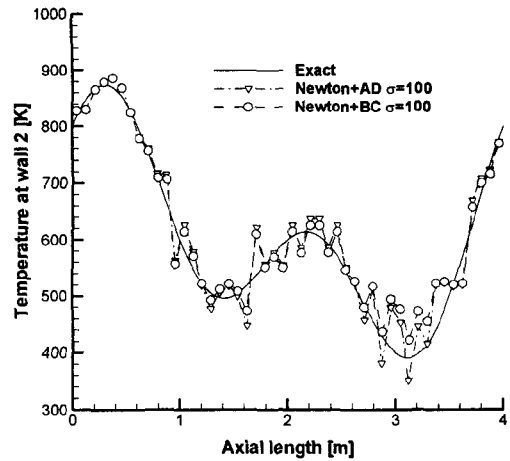
여기서, T_{est} 와 T_{ex} 는 각각 추정값과 엄밀해를 나타낸다.

표 6의 결과와 같이, Broyden 혼합법을 사용했을 때의 반복회수가 자동미분법의 반복회수와 거의 비슷해짐을 알 수 있는데, 이는 측정오차를 고려할 경우, 역해석 해에 진동 현상을 줄이기 위해서 약간의 오차를 허용하는 수렴조건을 사용했기 때문이다.

3.3 역기법의 검증



(a)



(b)

Fig. 3 Estimation of temperature for test function 2 : (a) $\sigma_{st} = 50$, (b) $\sigma_{st} = 100$

Table 6 Comparison of iteration number and computational time for QNM+BC and QNM+AD when measurement errors are considered

Error level (σ_s)	QNM+BC			QNM+AD		
	Iter. no.	CPU (sec)	$\epsilon_{R.E.}$	Iter. no.	CPU (sec)	$\epsilon_{R.E.}$
50	6	50.9	0.016	4	164.3	0.015
100	5	48.2	0.026	4	153.8	0.026

준뉴튼법(Newton)으로 구한 해를 검증하기 위해서 공역구배법(CGМ)과 측정 오차에 대한 영향을 감쇠하는 기능이 있는 Levenberg-Marquardt법(LVMQ)을 $\sigma_{st} = 50$ 경우에 적용하여

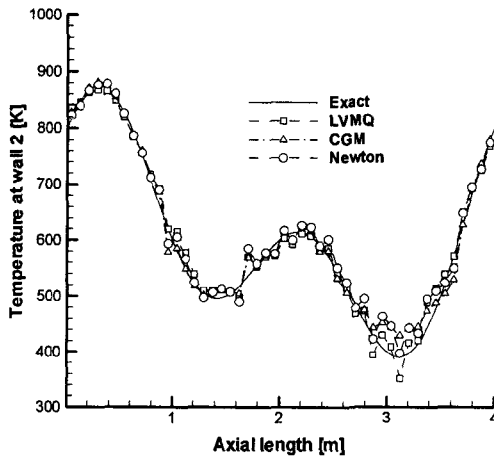


Fig. 4 Estimation of temperature with various inverse methods for the case of $\sigma_{st} = 50$

해를 구하고, 이를 비교하였다. Fig. 4의 결과가 보여주듯이 준뉴턴법의 결과와 다른 방법들과 비슷한 결과를 보여줌을 알 수 있었고, 이를 통해 역해석의 해를 검증할 수 있었다.

4. 결론

함수 추정 방식으로 축대칭 원통 형상에서의 경계 온도 분포를 추정하는 역복사문제를 고려하였다. 다양한 민감도 기법들의 정확도와 계산시간 등을 비교하고, 민감도 계수의 정확도가 온도 추정에 미치는 영향을 살펴보고, 준뉴턴법을 이용하여 역해석의 해들을 구한 뒤, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 자동미분법은 유한차분법과 거의 같은 정확도를 보이면서도 약 절반의 계산시간만이 필요하였다.
2. Broyden 혼합법으로 구한 민감도 계수는 자동미분법과 유한차분법의 결과와 많은 차이가 있지만, 계산시간은 거의 필요치 않았다.
3. 추정오차를 고려하지 않았을 때, 평균변화율을 계산하는 Broyden 혼합법을 준뉴턴법에 적용할 경우, 자동미분법의 경우보다 5배 정도 많은 반복회수가 필요했지만, 계산시간은 2배 정도 적게 걸렸고, 두 경우 모두 정확한 온도 분포를 추정하였다.
4. 추정오차를 고려하였을 때, Broyden 혼합법을 이용할 경우 수렴을 위한 반복회수가 자동미분법의 경우와 거의 비슷해 졌고, 계산시간은 3-4배정도 적게 걸렸다.

후 기

본 연구는 CERC(연소기술연구센터)의 지원으로 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- [1] Kurpisz K. and Nowak A. J., "Inverse Thermal Problems", *Computational Mechanics Inc.*, USA, 1995.
- [2] Li H. Y., "A Two-Dimensional Cylindrical Inverse Source Problem in Radiative Transfer", *J. Quant. Spectrosc. Ra.*, Vol. 69, 2001, pp. 403-414.
- [3] Ou N. R., "Simultaneous Estimation of Extinction Coefficient Distribution, Scattering Albedo and Phase Function of a Two-Dimensional Medium", *Int. J. Heat Mass Trans.*, Vol. 45, 2001, pp. 4663-4674.
- [4] Yang C. Y., "Estimation of Boundary Conditions in Nonlinear Inverse Heat Conduction Problems", *J. Thermophys. Heat Tr.*, Vol. 17, 2003, pp. 389-395.
- [5] Özisik, M. N. and Orlande, H. R. B., "Inverse Heat Transfer", *Taylor & Francis*, New York, 2000.
- [6] Kim K. W., Baek S. W., and Ryu H. S., "Comparison of Optimization Techniques for an Inverse Radiation Boundary Problem", *The International Conference on Computational Methods*, Singapore, 2004.
- [7] Chui E. H., Raithby G. D., and Hughes P. M. J., "Prediction of radiative transfer in cylindrical enclosure with the finite volume method", *J. Thermophys. Heat Tr.*, Vol. 6, 1992, pp. 605-611.
- [8] Dennis J. E. and Schnabel R. B., "Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations", *Prentice-Hall*, New Jersey, 1983.
- [9] Bischof C., Carle A., Khademi P., Mauer A., and Hovland P., "ADIFOR2.0 User's Guide (Revision D)", *ANL/MCS-TM-192, and CRPC -TR95516-S*, 1998.
- [10] Martinez J. M., "Practical Quasi-Newton Methods for Solving Nonlinear Systems", *J. Comput. Applied Math.*, Vol. 124, 2000, pp.97-121.