

## 최소 제곱 오류 변환을 위한 빠른 계산 방법

이 성환, 김 진형

한국과학기술원 전산학과 인공지능 연구실

## A Fast Computational Method for Minimum Square Error Transform

Seongwhan Lee and Jin H Kim

Artificial Intelligence Lab, Dept of Computer Science, KAIST

## 요약

영상 정합(Image matching)은 컴퓨터 시각 연구에 있어서 중요한 연구 분야 중의 하나이다. 본 논문에서는 최소 제곱 오류 변환(Minimum square error transform)을 이용한 점 패턴 정합(Point pattern matching) 알고리즘을 소개하고, 이 알고리즘에 대한 빠른 계산 방법을 제안하며, 계산량 분석 및 실험을 통하여 제안된 방법이 기존의 방법에 비하여 우수함을 보인다.

## I. 서론

영상 정합(Image matching)은 시간의 경과에 의한 변화 감지(Change detection), 목표물 추적(Target cueing), 스테레오 사상(Stereo mapping) 및 지도나 미리 수집된 정보를 이용한 무인 비행과 같은 여러 응용 분야에 이용되고 있는 컴퓨터 시각 연구에 있어서 중요한 연구 분야 중의 하나이다. 그러나 영상 정합은 자체에 내재되어 있는 다량의 탐색과 많은 계산량 및 2차원 영상으로부터 3차원 물체에 관한 정보를 추출해야 하는 등의 문제점으로 인하여 현재도 꾸준한 연구가 이루어지고 있다. 영상 정합의 방법으로는 Space에서나 Spatial frequency domain에서 수행되는 Correlation이 있는데, 두 경우 모두 정합의 비용(Cost)은 영상 데이터의 양에 비례한다[1]. 보다 경제적인 방법은 정합될 두 영상 데이터로부터 특징점(Feature point)들을 추출한 다음, 이 특징점들을 정합시키는 방법이다. 이러한 방법을 점 패턴 정합(Point pattern matching)[1-5] 이라고 하는데 이 때 정합의 비용은 영상 데이터의 양보다는 특징점들의 수에 비례한다. 본 논문에서는 점 패턴 정합의 한 방법인 Groen 등[5]의 최소 제곱 오류 변환(Minimum square error transform)을 이용한 점 패턴 정합 알고리즘을 소개하고 이 알고리즘에 대한 빠른 계산 방법을 제안한다.

## II. 최소 제곱 오류 변환

일반적으로 두 점 패턴은 패턴의 모든 점 쌍(Point pair)에 대하여 두 좌표 시스템(Coordinate system)간에 아래와 같이 적절한 함수적 관계(Functional relation)가 존재할 때 동일(Equivalent)하다고 말한다.

$$x = f(r, s) \quad (1a)$$

$$y = g(r, s) \quad (1b)$$

그러나 실제 상황에서는 엄밀히 이야기할 때 앞서 언급된 의미로는 항상 동일하다고 말할 수 없다. 단지 두 점 패턴간에 근사적 관계만이 존재하고 그 근사적 관계는 어떤 오류 기준(Error criterion)을 최소화시키는 변환을 찾음으로서 결정될 수 있다. 한 점 패턴에  $n$ 개의 점이 존재할 때, 두 점 패턴간의 근사적 관계  $f$ 와  $g$ 는 최소제곱의 의미로서 결정될 때 이러한 변환을 최소 제곱 오류 변환이라고 한다. 즉  $w_i$ 가 정합의 정도(Likelihood of match)에 있어서 오류에 대한 가중치(Weight)를 결정하는 계수라고 할 때 근사관계  $f$ 와  $g$ 는 아래의 변환 오류  $E$ 를 최소화시키도록 결정된다.

$$E = \sum w_i \{ [x_i - f(r_i, s_i)]^2 + [y_i - g(r_i, s_i)]^2 \} \quad (2)$$

III. 기존의 최소 제곱 오류 변환 방법

Groen 등[5]은  $r_0$ ,  $s_0$ 를 Translation,  $\theta$ 를 Rotation,  $c$ 를 Scale이라고 할 때,  $f$ 와  $g$ 를 아래와 같이 정의되는 변환으로 제약하였다

$$f(r_1, s_1) = c \cos \theta (r_1 - r_0) + c \sin \theta (s_1 - s_0) \quad (3a)$$

$$g(r_1, s_1) = -c \sin \theta (r_1 - r_0) + c \cos \theta (s_1 - s_0) \quad (3b)$$

이 때, 계산의 효율을 높이기 위하여 다음을 정의하였다

$$c_x = \sum_1 w_1 x_1$$

$$c_y = \sum_1 w_1 y_1$$

$$c_r = \sum_1 w_1 r_1$$

$$c_s = \sum_1 w_1 s_1$$

$$c_{xx} = \sum_1 w_1 x_1 x_1$$

$$c_{yy} = \sum_1 w_1 y_1 y_1$$

$$c_{rr} = \sum_1 w_1 r_1 r_1$$

$$c_{ss} = \sum_1 w_1 s_1 s_1$$

$$c_{xr} = \sum_1 w_1 x_1 r_1$$

$$c_{xs} = \sum_1 w_1 x_1 s_1$$

$$c_{yr} = \sum_1 w_1 y_1 r_1$$

$$c_{ys} = \sum_1 w_1 y_1 s_1$$

E를  $r_0$ ,  $s_0$ ,  $\theta$ ,  $c$ 에 관하여 미분하여 0으로 놓음으로서 아래의 방정식을 유도하였다

$$\partial E / \partial r_0 = 0:$$

$$r_0 = c_r - c_x / c \cos \theta + c_y / c \sin \theta$$

$$\partial E / \partial s_0 = 0$$

$$s_0 = c_s - c_y / c \cos \theta + c_x / c \sin \theta$$

$$\partial E / \partial c = 0.$$

$$c(c_{rr} - 2c_r r_0 + r_0^2 + c_{ss} - 2c_s s_0 + s_0^2 =$$

$$(c_{xr} + c_{ys} - c_x r_0 - c_y s_0) \cos \theta + (c_{xs} - c_{yr} - c_x s_0 + c_y r_0) \sin \theta$$

$$\partial E / \partial \theta = 0$$

$$\sin \theta (c_{ys} + c_{xr} - s_0 c_y - r_0 c_x) = \cos \theta (c_{xs} - c_{yr} - s_0 c_x + r_0 c_y)$$

이러한 방정식으로부터 변환 매개 변수와 변환 오류는 다음과 같이 계산되었다

rotation:

$$\tan \theta = (c_{xs} - c_{yr} - c_x c_s + c_y c_r) / (c_{xr} + c_{ys} - c_x c_r - c_y c_s)$$

scale:

$$c = \{ (c_{xr} + c_{ys} - c_x c_r - c_y c_s) \cos \theta + (c_{xs} - c_{yr} + c_x c_s + c_y c_r) \sin \theta \} / (c_{rr} + c_{ss} - c_r c_r - c_s c_s)$$

translation

$$r_0 = c_r - c_x / c \cos \theta + c_y / c \sin \theta$$

$$s_0 = c_s - c_y / c \cos \theta + c_x / c \sin \theta$$

$$E = c_{xx} + c_{yy} - c_x c_x - c_y c_y - c^2(c_{rr} + c_{ss} - c_r c_r - c_s c_s)$$

IV. 제안된 빠른 최소 제곱 오류 변환 방법

만약  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ 을 적절히 정의하면 방정식 (3a)와 (3b)는 아래와 같이 표현될 수 있다

$$f(r_1, s_1) = a_0 + a_1 r_1 - b_1 s_1 \quad (3a')$$

$$g(r_1, s_1) = b_0 + b_1 r_1 + a_1 s_1 \quad (3b')$$

방정식 (3a')와 (3b')에서 정의된  $f$ 와  $g$ 를 방정식 (2)로 치환하면 다음과 같은 오류를 얻을 수 있다

$$E = \sum w_1 \{ [x_1 - (a_0 + a_1 r_1 - b_1 s_1)]^2 + [y_1 - (b_0 + b_1 r_1 + a_1 s_1)]^2 \} \quad (4)$$

E를 최소화하기 위하여 E를  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ 에 대하여 미분값을 0으로 놓음으로서 아래의 식을 유도할 수 있다

$$\partial E / \partial a_k = 0 \quad (5a)$$

$$\partial E / \partial b_k = 0 \quad (5b)$$

for  $k = 0, 1$ .

식 (5a)로부터 방정식 (6a)와 (6b)가 유도되고 식 (5b)로부터 방정식 (6c)와 (6d)가 유도된다 이 때 방정식 (6a), (6b), (6c), (6d)는 다음과 같은 행렬 형태로 나타낼 수 있다

$$\sum [x_1 - (a_0 + a_1 r_1 - b_1 s_1)] = 0 \quad (6a)$$

$$\sum \{ r_1 [x_1 - (a_0 + a_1 r_1)] + s_1 [y_1 - (b_0 + a_1 s_1)] \} = 0 \quad (6b)$$

$$\sum [y_1 - (b_0 + b_1 r_1 + a_1 s_1)] = 0 \quad (6c)$$

$$\sum \{ s_1 [x_1 - (a_0 - b_1 s_1)] + r_1 [y_1 - (b_0 + b_1 r_1)] \} = 0 \quad (6d)$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum r_1 & 0 & -\sum s_1 \\ \sum r_1 & \sum (r_1^2 + s_1^2) & \sum r_1 & 0 \\ 0 & \sum s_1 & n & \sum r_1 \\ -\sum s_1 & 0 & \sum r_1 & \sum (r_1^2 + s_1^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum x_1 \\ \sum (y_1 r_1 + x_1 r_1) \\ \sum y_1 \\ \sum (y_1 r_1 - x_1 s_1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

식 (7)을 보다 간결한 형태로 나타내면 다음과 같다

$$A = M^{-1}X \quad (8)$$

따라서 변환 오류 E와 변환 매개 변수  $r_0, s_0, \theta, c$ 들은 다음과 같이 결정된다

$$E = \Sigma x_1^2 + \Sigma y_1^2 - AX \tag{9}$$

$$\theta = \tan^{-1}(-b_1, a_1) \tag{10a}$$

$$c = a_1 / \cos \theta \tag{10b}$$

$$r_0 = (b_0 \sin \theta - a_0 \cos \theta) / c \tag{10c}$$

$$s_0 = -(a_0 \sin \theta - b_0 \cos \theta) / c \tag{10d}$$

제안된 최소 제곱 오류 변환법은 기존의 최소 제곱 오류 변환법[5]보다 효율적임을 쉽게 알 수 있다 이 변환법에서의 M은 모델 점 패턴에서의 점만으로 구성된다 따라서 행렬 M은 각 모델 점 패턴에 대하여 단지 한번만 계산하면 되므로 계산량의 감소가 가능해진다. (하나의 입력 점 패턴이 여러 모델 점 패턴에 비교될 경우도 마찬가지로 계산량의 감소를 가져올 수 있다) 계산량에 관한 비교 분석은 다음 장에서 이루어진다

### V. 계산량의 비교 분석

각각 n개의 점으로 구성된 두 점 패턴 사이의 최소 제곱 오류 변환을 고려해 보자 기존의 방법[5]은 표 1에서와 같이 모두  $12n+23$ 번의 덧셈과  $8n+1$ 번의 곱셈 및 3번의 삼각함수 계산을 필요로 하는 반면에 제안된 방법은 표 2에서와 같이 모두  $8n+25$ 번의 덧셈과  $6n+32$ 번의 곱셈 만을 필요로 하고 삼각함수의 계산은 필요로 하지 않음을 알 수 있다 따라서 삼각함수 계산을 필요로 하지 않음은 물론 덧셈은 약  $(12n+23)/(8n+25)$  비율 만큼 감소하고, 곱셈은 약  $(8n+11)/(6n+32)$  비율 만큼 감소함을 알 수 있다.

$C_{x_1}, C_{y_1}$	12n번의 덧셈, 8n번의 곱셈
$\theta$	6번의 덧셈, 1번의 곱셈, 1번의 $\tan^{-1}$
a	10번의 덧셈, 9번의 곱셈, 2번의 $\sin/\cos$
E	7번의 덧셈, 1번의 곱셈

표 1 기존 방법에서의 필요한 계산량

X	6n번의 덧셈, 4n번의 곱셈
$M^{-1}X$	12번의 덧셈, 16번의 곱셈
$\Sigma x_1^2 + \Sigma y_1^2$	2n+1번의 덧셈, 2n번의 곱셈
AX	12번의 덧셈, 16번의 곱셈

표 2 제안된 방법에서의 필요한 계산량

### VI. 실험

제안된 계산 방법은 손으로 그린 공학도면 기호의 인식 시스템[6]에 적용되었다 실험에서는 모두 5 종류(AND 게이트, OR 게이트, Invertor 게이트, Amplifier, Three-state 버퍼)의 손으로 그린 공학 도면 기호들이 사용되었다. 기호들은 MC68000 프로세서에 기반을 둔 VME 버스 시스템에서 스캔되고 처리되며 그림 1과 그림 2는 속성 관계 그래프(Attributed Relational Graph) 정합을 통하여 입력된 특정 기호가 인식되는 과정의 예를 보여준다 모델의 학습을 위해서 모두 10개의 영상(각 종류 당 2개씩)을 사용하였으며 실험을 위하여 모두 50개의 영상(각 종류 별 10개씩)을 사용하였다 실험 결과 50개의 영상 가운데 48개의 영상에 대한 매개 변수들이 올바르게 추출되었으며 제안된 계산방법이 기존의 방법에 비하여 평균 0.7배의 속도로 수행되었다 제안된 계산 방법은 공학 도면 기호의 인식을 위한 연구 이외에 자동 인장 검증(Automatic seal verification)을 위한 연구[7]에도 적용되고 있다

### VII. 맺는 말

본 논문에서는 점 패턴 정합 알고리즘으로서 Groen 등 [5]이 제안한 최소 제곱 오류 변환을 이용한 점 패턴 정합 알고리즘에 대한 빠른 계산 방법을 제안하였으며 계산량 분석을 통하여 제안된 계산 방법이 기존의 계산 방법에 비하여 우수함을 보였다

### 감사의 말씀

본 논문이 완성되기 까지 세심한 조언과 배려를 아끼지 않으신 네덜란드 Delft 공과 대학 패턴 인식 학과의 F.C.A Groen 교수에게 깊은 감사의 뜻을 표한다

### 참고 문헌

- [1] Ranade, S and A Rosenfeld, "Point pattern matching by relaxation," Pattern Recognition, Vol 12, 1980, pp 269-275
- [2] Kahl, D.J., A. Rosenfeld and A. Danker, "Some experiments in point pattern matching," IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC-10, 1980, pp. 105-116.
- [3] Ogawa, H., "Labeled point pattern matching by fuzzy relaxation," Pattern Recognition, Vol 17, 1984, pp 569-573.
- [4] Ogawa, H., "Labeled point pattern matching by delaunay triangulation and maximal cliques," Pattern Recognition, Vol. 19, 1986, pp. 35-40
- [5] Groen, F.C.A., A.C. Sanderson and J.F. Schlag, "Symbol recognition in electrical diagrams using probabilistic graph matching," Pattern Recognition Letters, Vol. 3, pp. 343-350.

[6] Lee, S. and J.H. Kim, "Recognising hand-drawn symbols in engineering drawings," Proceedings of 3rd International Conference on Application of Artificial Intelligence in Engineering, Stanford, Aug. 1988. (To appear)

[7] Lee, S. and J.H. Kim, "Automatic verification of unconstraint seal imprint using attributed stroke graph matching," Proceedings of 1988 International Conference on Computer Processing of Chinese and Oriental Languages, Toronto, Aug. 1988. (To appear)

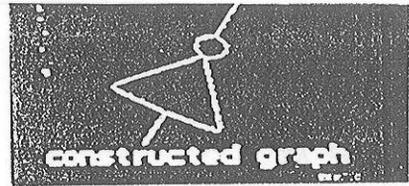


그림 1(d). 오류 수정 및 구간별 근사 후의 속성 관계 그래프

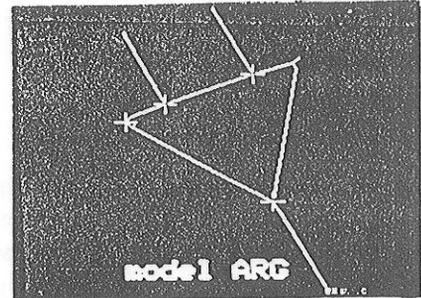


그림 2(a). 모델 속성 관계 그래프



그림 1(a). 입력 도면 기호의 원래 영상

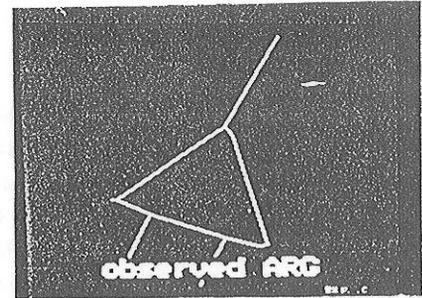


그림 2(b). 정합된 입력 속성 관계 그래프

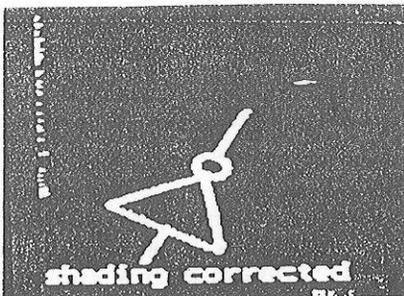


그림 1(b). 그림자 제거 및 이진화

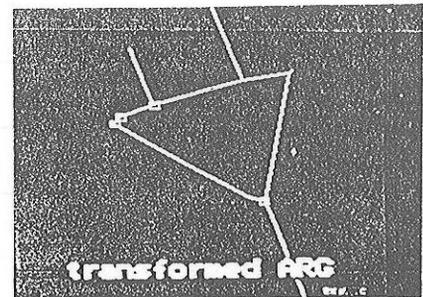


그림 2(c). 추정된 자세에 의하여 변환된 속성 관계 그래프

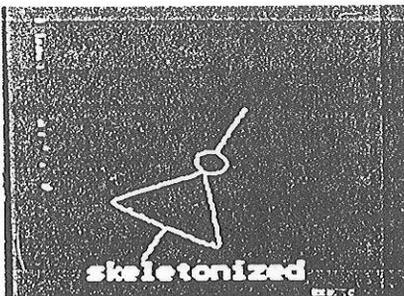


그림 1(c). 세선화된 영상

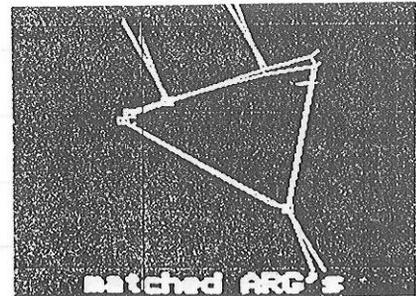


그림 2(d). 정합의 결과를 보여주는 두 속성 관계 그래프들