

실증적 추계할인율에 대한 연구 : KOSPI 200 옵션 시장을 중심으로

강 장 구*
김 병 천**
류 두 진***
윤 재 선****

투고일 2008년 07월 24일, 게재확정일 2008년 11월 03일
수정일 (1차) 2008년 10월 22일, (2차) 2008년 11월 03일

<요 약>

본 연구는 KOSPI 200 옵션가격이 함의하는 실증적 추계할인율(empirical pricing kernel)을 Rosenberg and Engle(2002)의 역 공학기법(reverse engineering)을 이용하여 추정한다. 논문의 주요 실증분석 결과는 아래와 같다.

첫째, S&P 500 옵션 자료를 이용한 Rosenberg and Engle(2002)의 결과와는 달리 멱함수 형태의 추계할인율에 비해 보다 복잡하고 일반적인 함수형태를 갖는 다항식 형태의 추계할인율의 헤지 성과가 우수했으며, 내표본 가격결정력과 외표본 예측력 역시 우월했다.

둘째, 옵션가격과 보수를 고려하는 것 이외에 단기 채권가격을 정확히 가격결정하도록 제약하는 경우, 실증적 추계할인율의 가격결정력과 예측력이 상대적으로 열등해 졌다. 단, 멱함수 형태의 추계할인율의 경우 열등해진 정도가 큰 반면, 다항식 형태의 추계할인율의 경우 옵션가격만을 이용하여 추정한 경우와 그 차이가 크지 않다. 헤지 성과의 경우, 채권가격을 고려하고 실증적 추계할인율을 추정하여도 헤지 성과가 크게 달라지지 않았으며 헤지 방법에 따라 오히려 더 헤지 성과가 좋아 지는 경우도 발견되었다.

셋째, 시간에 따라 변하지 않는 추계할인율을 사용하면, 가격결정력과 예측력은 크게 나빠지며, 다항식 형태의 실증적 추계할인율의 경우에서 이 차이가 더 두드러진다. 헤지 성과 또한 시간에 따라 변하는 실증적 추계할인율을 이용했을 때보다 상대적으로 열등해 진다. 단, 멱함수 형태의 실증적 추계할인율의 경우, 특정 헤지 방법을 사용했을 때는 오히려 시간에 따라 변하지 않는 평균적인 개념의 추계할인율의 헤지 성과가 더 좋았다.

넷째, 다항식 추계할인율은 기초자산의 수익률 변화에 따른 변동의 폭이 멱함수 추계할인율 보다 크며, 시간이 지남에 따라 기초자산의 수익률과의 관계 또한 큰 폭으로 변화한다. 멱함수 추계할인율은 기초자산의 수익률이 증가함에 따라 대체로 감소하는 경향을 보이는데 이는 투자자들의 한계효용이 감소함을 의미한다.

다섯째, 실증적 추계할인율로부터 유도된 위험회피도는 시간이 지남에 따라 변하였으며, 경제 상황을 잡아내는 변수들 중 오직 기초자산의 수익률과 위험회피도의 레그(lag) 값만이 통계적으로 유의한 관계를 보였다.

주요 단어 : 실증적 추계할인율, 헤지 성과, 위험회피도, KOSPI 200 옵션, 역 공학기법

* KAIST, E-mail : jkkang@business.kaist.ac.kr
** KAIST, E-mail : bckim@business.kaist.ac.kr
*** 교신저자, KAIST 경영대학, 130-722, 서울특별시 동대문구 청량리 2동 207-43 KAIST 경영대학 S391, E-mail : sharpjin@business.kaist.ac.kr, Tel : (02)958-3693.
**** 삼성투신운용, E-mail : jaesun16.yun@samsung.com

I. 서론

차익거래기회가 없다는 가정하에서 자산의 가격을 결정할 수 있는 선형가격결정 연산자(linear valuation operator)를 처음 제시한 Ross(1978)의 연구 이래, 자산의 보수가 주어졌을 때 이를 바탕으로 자산의 가격을 결정하는 연산자인 추계할인율(pricing kernel 혹은 stochastic discount factor)에 대한 분석과 연구¹⁾가 활발히 진행되었다. 추계할인율은 미래의 상태에 따른 보수에 대한 투자자들의 선호도에 관한 정보를 제공한다. 모든 자산의 가격은 상태변수(state variable)의 함수인 추계할인율과 이 상태변수에 대한 확률모형이 주어지면 자연스럽게 결정된다. 즉, 자산의 가격은 추계할인율과 상태에 따라 다른 값을 가질 수 있는 해당 자산의 보수의 곱에 대한 기대 값으로 주어지게 된다.

추계할인율에 대한 이론적인 연구 외에도 이를 정확히 추정하고자 하는 시도는 재무경제학분야에서 매우 중요한 주제이다. Lucas(1978)가 제시한 소비기반 자산가격결정모형(consumption-based asset pricing model)에서는 상태변수를 소비의 함수로 가정하여, 이 모형에서의 추계할인율은 현재와 미래 소비의 함수 형태가 된다. Lucas(1978) 이후에, 소비 자료를 이용하여 추계할인율의 추정을 시도한 많은 실증적 연구들이 등장하였다. Hansen and Singleton(1982, 1983)이 추계할인율을 미국 총 소비의 함수로 간주하고 이를 추정한 이래로, Hansen and Jagannathan(1991), Chapman(1997)과 같은 연구들이 소비 자료와 자산가격과의 관계를 연구하였다. 특히, Hansen and Jagannathan(1991)은 소비기반 추계할인율(consumption-based pricing kernel)의 평균과 표준편차의 경계를 시장 포트폴리오 초과수익률(market portfolio excess return)의 평균과 표준편차의 함수로 유도하였고, 이는 소비기반 자산가격결정모형을 포함하는 기간 자산가격결정모형(inter-temporal asset pricing model)에서의 추계할인율들이 만족해야 할 최소한의 조건을 제시한 셈이다.

소비 자료를 이용해 추계할인율을 추정하는 논문들의 상당수는 경제학적 이론에 근거한 모형들에 대한 추정을 하는 것이지만, 기본적으로 투자자들의 위험선호도에 대한 가정을 요구하는 균형접근모형들에 대한 추계할인율을 추정하는 것이다. 무엇보다 추정에 이용되는 총 소비 자료는 데이터 자체가 부정확하게 측정된다는 약점

1) Harrison and Kreps(1979), Hansen and Richard(1987), Campbell, Lo, and Mackinlay(1997), 그리고 Cochrane(2001)등의 연구가 있다.

이 있고, 일별 소비자료는 일반적으로 존재하지 않는 경우가 많다. Ermini(1989), Wilcox(1992), 그리고 Slesnick(1998)는 Hansen and Singleton(1982)등의 연구에서 사용한 NIPA(National Income and Products Accounts)의 소비 자료의 문제점을 지적하였다. 따라서, 이러한 소비 자료를 이용하여 추계할인율을 추정을 하게 되면 실증분석 결과가 좋지 않게 나올 수 있다.

한편, 소비 자료를 사용하지 않고, 무차익거래 접근방법을 이용하여 투자자들의 위험선호에 대한 가정을 하지 않고, 자산의 시장가격으로부터 추계할인율이나 상태가격밀도(state price density) 혹은 위험회피함수(risk aversion function)를 추정한 연구들이 있다. 상태가격밀도는 추계할인율에 개별자산 수익률분포의 확률밀도를 곱한 것이므로, 추계할인율의 추정과정이나 상태가격밀도의 추정과정은 비슷한 함의를 갖는다. 또한, 위험회피함수도 추계할인율이나 상태가격밀도를 도출하는 과정에서 구할 수 있다. 이와 같은 추정방법을 역 공학기법(reverse engineering) 이라고 한다.

기존의 연구들은 역 공학기법을 이용하여 주로 S&P 500 지수와 S&P 500 옵션 자료를 가지고 추계할인율과 상태가격밀도 등의 추정을 시도하였다. Jackwerth and Rubinstein(1996)은 S&P 500 옵션가격으로부터 이 옵션가격이 함의하는 지수 수익률의 확률적 분포를 추정하였다. Ait-Sahalia and Lo(1998)는 비모수적 추정방법(non-parametric estimation method)을 이용하여 옵션가격이 의미하는 상태가격밀도를 추정하였다. Jackwerth(2000)와 Ait-Sahalia and Lo(2000) 또한 비모수적 방법을 이용하여 S&P 500 옵션가격과 S&P 500 지수의 수익률로부터 위험회피함수를 추출하였다. 추계할인율을 기초자산의 수익률 공간에 투영시키면, 추계할인율이 상태변수의 함수가 아닌 기초자산의 함수형태가 된다. 이들은 원래의 추계할인율 대신에 이와 같은 투영된 추계할인율²⁾을 추정함으로써 소비자료를 사용해야 하는 문제를 피해갔다. 그러나 Jackwerth(2000)와 Ait-Sahalia and Lo(2000)의 연구에서의 추계할인율이나 위험회피함수는 이들 값들이 1년 이하의 단위, 즉 월별로 변하는 것에 대해서는 고려하지 않았다. 또한 추정과정에서 4년의 사건 창(event window)을 사용하여 최근 4년 동안에는 확률분포가 동일하게 가중 평균 되지만, 추정시점으로부터 4년 이전의 값은 전혀 추정에 영향을 미치지 않는다고 가정하였다.

위와 같은 문제점을 보완한 Rosenberg and Engle(2002)의 연구에서는 기초자산

2) Rubinstein(1976)과 Brown and Gibbons(1985)는 추계할인율이 투영된 추계할인율과 동일하게 되는 조건을 유도하였다.

의 확률과정이 비대칭 GARCH 모형을 따른다는 가정하에서, 투영된 추계할인율의 형태를 기초자산 수익률의 멱함수와 다항식 형태로 가정하고 이를 월별로 추정하고 이것을 실증적 추계할인율(empirical pricing kernel)이라고 명명하였다. Rosenberg and Engle(2002)이 가정한 멱함수 형태의 실증적 추계할인율의 모수 중 하나는 Pratt-Arrow(Pratt(1964), Arrow(1964))의 상대적 위험회피도를 의미하게 된다. 따라서 추정된 실증적 추계할인율이 시간이 지남에 따라 변함에 따라 위험회피도 역시 변하게 된다.

앞에서 소개한 연구들은 모두 같은 계열의 자산, 즉 S&P 500 주가지수와 S&P 500 옵션을 가지고 추계할인율 등을 추정하였지만, Chernov(2003)는 S&P 500 지수는 물론, 개별주식, T-bills, 그리고 금 선물등의 자산 가격을 모두 고려한 추계할인율을 제시하였다. Chernov(2003)는 추계할인율이 S&P 500 지수의 수익률과 래그(lag) 수익률의 복잡한 비선형 함수형태이고, CAPM(Capital Asset Pricing Model) 모형은 이 추계할인율의 1차 근사 형태임을 보였다. 또한 이들의 추계할인율은 Campbell and Cochrane(1999)의 확률적 습관형성모형(stochastic habit formation model)의 틀에서 설명될 수 있다고 주장하였다.

자산가격을 이용하여 추정을 시도하는 역 공학기법을 이용한 또 다른 연구들로는 Pan(2002)과 Broadie, Chernov, and Johannes(2007)가 있다. Pan(2002)은 Heston(1993)의 추계변동성 모형을 확장한 Bates(2000)의 틀에서 S&P 500 옵션가격이 함의하는 위험보상(risk premium)을 도출하였다. 특히 이들은 기초자산인 S&P 500 지수가격의 점프를 옵션 자산의 가격결정하는데 고려하는 모수적 추계할인율(parametric pricing kernel)을 도입하였다. Broadie et al.(2007) 역시, S&P 선물 옵션 시장에서 추계변동성 점프(stochastic volatility jump) 모형을 가정하고 옵션가격이 함의하는 위험보상을 도출하였다. 한편, 효용함수를 가정하긴 하지만, 자산가격으로부터 위험회피함수를 도출한 Bliss and Panigirtzoglou(2004)는 멱함수와 지수함수 형태의 효용함수를 가정하고, FTSE 100 옵션과 S&P 500 옵션가격이 함의하는 위험회피함수의 기간구조를 도출하였다. 국내 옵션 시장에 관한 최근 연구로는 KOSPI 200 지수의 확률과정이 Heston(1993)의 추계적 변동성모형을 따른다고 가정하고 EMM(Efficient Method of Moment) 방법을 이용하여 KOSPI 200 옵션가격으로부터 추계할인율을 추정한 한상일, 윤창현(2007)이 있다.

본 연구에서는 기본적으로 Rosenberg and Engle(2002)의 방법론을 따라 KOSPI

200 옵션의 시장가격이 의미하는 추계할인율을 추정³⁾한 뒤, 이 추정된 실증적 추계할인율을 이용하여 KOSPI 200 옵션에 대한 가격결정력, 예측력 및 헤지 성과와 같은 실증 성과(empirical performance)를 조사한다. 그리고 KOSPI 200 옵션가격이 함의하는 실증적 추계할인율이 어떤 특성을 갖는지를 살펴보고, 이러한 특성이 KOSPI 200 콜옵션 및 풋옵션에 대한 실증 성과결과와 어떤 관련이 있는지를 설명해 보고자 한다. 실증 성과를 조사할 때는 옵션의 종류, 가격도, 추정방법, 헤지 방법, 그리고 예측 오차 및 헤지 오차 측정기간에 따라 자세한 분석을 시도한다. 또한 KOSPI 200 옵션가격이 의미하는 실증적 추계할인율과 투자자들의 위험회피도와 관련된 모수가 시간이 지남에 따라 어떻게 변화하는지 살펴보고, 위험회피도가 경기변동 주기와 어떤 관련을 갖는지를 살펴본다. KOSPI 200 옵션시장은 유동성이 대단히 풍부한 시장이므로 이 옵션가격이 의미하는 추계할인율과 위험회피도의 모수를 이용하여 가격결정력 및 헤지 성과와 시장상황 등을 알아보는 것은 매우 의미 있는 연구가 될 것이다. 국내 옵션시장에 대하여, 실증적 추계할인율을 이용한 이와 같은 다양한 분석은 본 연구에서 처음 시도되는 것이다.

역 공학기법을 이용하여 자산가격이 의미하는 추계할인율이나 위험회피도를 추정하는 많은 연구들이 있지만, 옵션의 시장가격 자체가 의미하는 추계할인율을 정확하게 잘 잡아낸다는 점에서, Rosenberg and Engle(2002)의 모형을 선택하였다. 본 연구에서는, 이들이 가정한 두 종류의 추계할인율인 멱함수 형태의 추계할인율과 좀 더 복잡한 다항식 형태의 추계할인율에 대하여 모두 추정한 뒤, KOSPI 200 옵션에 대한 실증 성과의 차이를 비교해 본다. 또한, 시장에서 거래되는 단기 채권의 가격도 고려하고 이들 추계할인율을 추정하였을 때와 옵션의 가격만을 가지고 추계할인율을 추정 하였을 때, 실증성과의 차이가 있는지를 살펴본다. 한편, Rosenberg and Engle(2002) 모형의 장점은 자산가격이 변함에 따라 추계할인율이 시변(time-varying)한다는 것이다. 이렇게 매 시점 변하는 추계할인율을 사용하여 가격결정과 헤지를 하는 것과 시간불변(time-invariant)하는 추계할인율을 사용하여 가격결정과 헤지를 했을 때 성과의 차이가 있는지도 조사한다.

3) 비록 국내 옵션시장에서 노이즈(noise) 투자자로 대변되는 개인투자자의 참여비율이 높지만, Ahn, Kang, and Ryu(2008)등에 따르면, 개인투자자에 비해 상대적으로 정보거래자인 기관투자자나 외국인 투자자들이 존재하므로, 설사 개인투자자가 (잠재적인) 비합리적 거래를 한다고 하더라도 옵션 가격을 합리적인 균형가격으로 가져갈 수 있다. 또한, KOSPI 200 옵션의 시장가격으로부터 위험중립분포를 추출한 김솔(2006, 2008) 및 위험회피도를 추출한 변석준, 윤선중, 강병진(2008) 등의 연구는 국내 옵션시장 가격이 합리적이라고 가정하고 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 II장에서는 본 연구에서 사용되는 추계할인율 모형 및 기초자산의 상태확률모형을 소개하고 추정방법을 설명한다. 제 III장에서는 KOSPI 200 옵션시장의 특성 및 논문의 표본자료를 설명한다. 제 IV장에서는 기초자산의 확률분포와 추계할인율을 추정하고 그 특성을 살펴본다. 제 V장에서는 추계할인율의 실증 성과를 살펴보고, 제 VI장에서는 추계할인율로부터 유도된 위험회피도와 경기변동성간의 관계를 알아본다. 제 VII장은 결과에 대해 정리하고 추후 연구의 방향을 제시한다.

II. 이론적 배경 및 추계할인율의 추정 방법

1. 추계할인율 추정의 필요성

현대자산가격결정이론은 추계할인율의 관점에서 모두 설명될 수 있다. 경제내에 차익거래기회가 존재하지 않는다면, 항상 양의 값을 갖는 추계할인율 확률과정 $\{M_t\}$ 가 존재하여 중간현금흐름이 없는 모든 자산의 가격은 다음 식을 만족해야 한다.

$$P_{i,t} = E_t(M_T P_{i,T}) \quad (1)$$

위의 식에서 $P_{i,t}$ 는 자산 i 의 t 시점에서의 가격을 의미한다. 위의 식을 수익률의 관점에서 표시하면, 다음과 같은 식으로 전환된다.

$$1 = E_t(M_T (1 + r_{i,T}))$$

위의 식을 다시 표현하면 아래와 같이 되고,

$$1 = E_t(M_T)E_t(1 + r_{i,T}) + Cov_t(M_T, r_{i,T})$$

따라서

$$E_t(r_{i,T}) = r_{f,T} - (1 + r_{f,T})Cov_t(M_T, r_{i,T}) \quad (2)$$

와 같다. 위의 식을 살펴보면, 임의의 자산의 기대초과수익률은 그 자산의 수익률과 추계적 할인률 간의 공분산과 음으로 비례함을 알 수 있다. 위의 식은 모든 자산가격결정모형이 만족해야 하는 근본적인 식이다. 예를 들어, CAPM은 위의 식에서 M_t 가 시장포트폴리오의 수익률에 선형으로 비례하는 경우이며, APT는 M_t 가 요소 포트폴리오들의 선형결합으로 나타내지는 경우이다. 각 자산가격결정모형은 이 M_t 에 대하여 어떤 가정을 하느냐에 따라 결정되는 것이다.

본 연구에서는 위의 M_t 를 옵션의 가격정보를 이용하여 가급적 작은 제약하에서 추정하고자 한다. 이와 같이 추정된 추계할인률은 미래 자산가격결정모형을 설계하는데 참고할 수 있는 정보를 제공할 것이다. 동시에 추계할인률을 추정한 경우 식 (1)을 이용하여 임의의 파생상품의 가격을 구할 수 있다. 이러한 의미에서 본 연구의 결과는 넓은 실용성을 가질 수 있다.

2. 투영된 추계할인율

상태변수의 함수인 추계할인율과 자산의 수익률이나 미래 가격 혹은 보수의 함수인 투영된 추계할인율(projected pricing kernel)은 그 형태는 서로 다를 지라도 자산의 가격을 결정하는데 있어서 동일한 역할을 하며, 투영된 추계할인율을 통해서도 위험회피도 등을 유도할 수 있다. 투영된 추계할인율을 사용하면, 어떤 변수를 상태변수로 사용해야 하는지에 대해 고민할 필요 없이 시장에서 거래되는 자산의 수익률 자료를 이용하여 투영된 추계할인율을 즉, 실증적 추계할인율 추정해 낼 수 있다.

투영된 추계할인율은 아래의 식 (3)에서 살펴볼 수 있듯이 상태변수의 함수인 원래의 추계할인율로부터 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} P_t &= E_t[M_t(Z_t, Z_{t+1})X_{t+1}] = E_t[E_t(M_t(Z_t, Z_{t+1})X_{t+1}|X_{t+1})] \\ &= E_t[E_t[M_t(Z_t, Z_{t+1})|X_{t+1}]X_{t+1}] = E_t[M_t^*(X_{t+1})X_{t+1}] \\ \text{단, } M_t^*(X_{t+1}) &= E_t[M_t(Z_t, Z_{t+1})|X_{t+1}] \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)에서 P_t 는 t 시점의 자산가격을 의미하고, Z_t 는 t 시점의 상태변수를, X_{t+1} 은 가격결정을 하고자 하는 자산의 $t+1$ 시점의 보수를 나타낸다. $M_t(Z_t, Z_{t+1})$ 는 상태변

수의 함수인 원래의 추계할인율을 의미하고 $M_t^*(X_{t+1})$ 는 자산가격공간에 투영된 추계할인율을 의미한다. 투영된 추계할인율은 자산가격의 함수가 된다. 식 (3)의 두 번째 등식은 반복적 기대연산 규칙(law of iterated expected operation)에 의해 성립한다.

이와 같이 유도된 투영된 추계할인율은 그 형태에 따라 다음과 같은 투자자들의 행태를 묘사한다. $M_t^*(X_{t+1})$ 이 자산의 미래 보수 값인 X_{t+1} 가 증가함에 따라 감소(증가)하는 함수형태인 경우, 자산의 미래 보수가 증가함에 따라 현재 자산에 대한 투자자들의 수요가 감소(증가)함을 의미한다. 왜냐하면, X_{t+1} 가 증가 하면 $M_t^*(X_{t+1})$ 가 감소(증가) 하게 되고, 자산의 현재 가격인 P_t 가 감소(증가)하기 때문이다. 한편, $M_t^*(X_{t+1})$ 가 상수인 경우는 미래 자산의 보수가 감소(증가) 하는지에 관계없이 투자자들의 수요는 일정함을 의미한다.

이 투영된 추계할인율로부터 Pratt-Arrow(Pratt(1964), Arrow(1964))의 상대적 위험회피측도(relative risk aversion measure)의 정의에 의해 상대적 위험회피도를 구하면 식 (4)와 같이 된다.

$$\gamma_t^* = -X_{t+1} \frac{M_t^{*'}(X_{t+1})}{M_t^*(X_{t+1})} \quad (4)$$

위험회피적인 성향을 가진 투자자는 $M_t^*(X_{t+1})$ 가 자산의 미래 보수(X_{t+1})가 증가함에 따라 감소하는 함수형태를 가질 것이다. 만약 위험회피도 값이 크다면, 투영된 추계할인율의 기울기의 절대값 $|M_t^{*'}(X_{t+1})|$ 이 크다는 의미이고 이는 투영된 추계할인율의 경사가 매우 가파름을 의미한다. 따라서 미래의 보수인 X_{t+1} 가 작은 값을 가질 때 추계할인율의 경사가 덜 가파를 때와 비교해 $M_t^*(X_{t+1})$ 가 상대적으로 큰 값을 갖게 되므로, 이때의 자산의 가격(P_t) 또한 큰 값을 갖게 된다. 이는 위험회피 투자성향이 큰 투자자들은 미래의 보수가 작을 때 추가적인 보상을 해주는 자산에 대하여 높은 수요를 가짐을 의미한다.

3. 실증적 추계할인율

실증적 추계할인율은 앞 절에서 살펴본 투영된 추계할인율을 실제 자산의 가격

혹은 수익률 자료를 이용하여 추정해낸 추계할인율이다. 특정시점에서의 실증적 추계할인율은 그 시점에서의 자산의 미래 보수에 대한 확률분포가 주어졌을 때, 현재 자산들의 시장가격을 가장 잘 설명할 수 있도록 결정된다. 즉, KOSPI 200 옵션의 기초자산에 해당하는 KOSPI 200 지수에 대한 확률분포가 주어졌을 때, 현재 시점에 시장에서 거래되는 KOSPI 200 옵션들의 가격들을 가장 잘 설명하는 추계할인율이 바로 이 옵션에 대한 실증적 추계할인율이 된다.

옵션의 가격은 추계할인율과 옵션의 미래 보수에 대한 확률분포가 주어지면 식 (5)와 같이 결정된다

$$P_{i,t} = E_t[M_t^*(r_T)f_i(r_T)] \quad (5)$$

식 (5)에서 T는 옵션의 만기시점을 의미하고, t는 현재 추계할인율을 추정하는 시점이다. 확률 변수 r_T 는 T시점에서 기초자산의 총 수익률(gross return)의 분포를 나타낸다. $P_{i,t}$ 는 T시점에 $f_i(r_T)$ 의 보수를 주는 i-번째 옵션의 t시점 가격을 의미한다.

이론적인 추계할인율이 주어졌을 때 이 추계할인율이 의미하는 옵션의 이론가격은 식 (6)과 같다.

$$P_{i,t}(\theta_t) = E_t[M_t^*(r_T; \theta_t)f_i(r_T)] \quad (6)$$

θ_t 는 추정되어야 할 추계할인율의 모수를 의미한다. 이때, 옵션의 이론가격은 옵션의 미래 보수에 대한 확률밀도를 몬테-카를로 시뮬레이션(Monte-Carlo simulation) 방법을 사용하여 T시점에서의 기초자산 수익률을 J번 실현시켜서 식 (7)과 같이 구한다.

$$P_{i,t}(\theta_t) \cong \sum_{j=1}^J [M_t^*(r_{T,j}; \theta_t)f_i(r_{T,j})]/J \quad (7)$$

추계할인율의 모수인 θ_t 는 옵션의 시장가격과 모형이 제시하는 이론가격과의 차이를 최소화 하도록 추정되어야 하므로 식 (8)을 이용하여 θ_t 를 매 t시점에서 추정

한다. 식 (8)에서 L 은 t 시점에서 존재하는 옵션종목의 수를 의미 한다.

$$\text{Min}_{\theta_t} \sum_{i=1}^L (P_{i,t}^{\text{market}} - P_{i,t}(\theta_t))^2 \quad (8)$$

Rosenberg and Engle(2002)은 두 가지 형태의 추계할인율 모형을 제시하였다.

첫 번째 모형은 추계할인율이 기초자산의 총 수익률의 멱함수 형태라고 가정한다. 이 멱함수 형태의 추계할인율(이하 멱함수 추계할인율)은 식 (9)와 같다.

$$M^*(r_T; \theta_t) = \theta_{0,t} (r_T)^{-\theta_{1,t}} \quad (9)$$

멱함수 추계할인율은 추정해야 할 모수의 수가 적고, 투영된 위험회피도(projected risk aversion)값을 직접적으로 추정할 수 있다는 장점이 있다. $\theta_{0,t}$ 는 조정요소(scaling factor)이고, $\theta_{1,t}$ 는 아래의 식 (10)에서 볼 수 있듯이, 상대적 위험회피도(relative risk aversion)가 된다. $\theta_{1,t}$ 의 추정치가 매 시점 변함에 따라 추계할인율과 위험회피도가 변하게 된다.

$$\gamma_t^* = -r_{t+1} \frac{M_t^*(r_{t+1})}{M_t^*(r_t)} = \theta_{1,t} \quad (10)$$

두 번째 모형은 일반화된 체비셰프 다항식(generalized Chebyshev polynomial)을 사용하여 추계할인율의 형태를 결정한다. 이 다항식 형태의 추계할인율(이하 다항식 추계할인율)은 추정해야 할 모수의 수가 많다는 단점은 있으나, 멱함수 형태의 추계할인율보다 좀더 유연한 형태로 추계할인율 함수의 형태를 가정하므로 현재 자산의 가격을 더 잘 설명할 가능성이 있다. 추정된 추계할인율이 항상 양의 값을 갖도록 하기 위하여 체비셰프 다항식을 변형하여 식 (11)과 같은 지수함수 형태를 사용한다.

$$M^*(r_T; \theta_t) = \theta_{0,t} T_0(r_T) \exp[\theta_{1,t} T_1(r_T) + \theta_{2,t} T_2(r_T) + \dots + \theta_{N,t} T_N(r_T)] \quad (11)$$

단, $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$

$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$ 이므로 x 의 범위는 $[-1, 1]$ 로 제한되어야 한다. 즉, 실현된 r_T 의 범위를 $[-1, 1]$ 구간으로 제한하거나 혹은, r_T 의 범위를 $[a, b]$ 로 제약하고 x 를 식 (12)와 같이 정의하여 x 의 범위를 $[-1, 1]$ 로 제한하여야 한다.

$$x = ((2r_T - a - b)/(b - 1)) \quad (12)$$

4. 상태 확률 밀도(State probability density specification)

앞 장에서 제시된 실증적 추계할인율을 추정하기 위해서는 기초자산 수익률의 확률분포에 대한 모형화가 필요하다. 본 논문에서는 기초자산에 해당하는 KOSPI 200 주가지수의 수익률의 확률과정이 GARCH 계열의 추계변동성 모형을 따른다고 가정하고 이를 추정한다. 이산시간(discrete time)하에서 추계변동성을 고려하는 ARCH 모형이 Engle(1982)에 의해 처음 제시되었고, Bollerslev(1986)는 이를 일반화하여 GARCH 모형을 제시 하였다. GARCH 모형은 변동성의 동태적 움직임을 잘 잡아내고, 분산군집(volatility clustering)등의 현상을 잘 설명할 수 있다는 장점이 있다. Glosten, Jagannathan, and Runkle(1993)은 자산의 수익률과 변동성간의 비대칭 반응(asymmetric response) 현상과 변동성 피드백(volatility feedback) 현상을 설명할 수 있도록, GARCH의 변동성 방정식(variance equation)에 오차의 비대칭 항(asymmetric term)을 추가한 GJR-GARCH 모형을 제시하였다. 이 논문에서는 Rosenberg and Engle(2002)에서처럼 기초자산의 확률과정이 아래와 같은 GJR-GARCH 형태의 비대칭 GARCH(1, 1) 모형을 따른다고 가정한다.

$$\text{평균 방정식 : } \ln(S_t / S_{t-1}) - r_{f,t-1} = \mu + \epsilon_t + \theta \epsilon_t, \quad \epsilon_t | I_{t-1} \sim f(0, h_t) \quad (13)$$

$$\text{분산 방정식 : } h_t = w + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \delta \text{Max}[0, -\epsilon_{t-1}]^2 \quad (14)$$

이 비대칭 GARCH 모형은 장기 변동성(long-run variance)이 존재하기 위하여 식 (15)와 같은 안정성 조건(stability condition)을 만족해야 한다.

$$\text{안정성 조건 : } w > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \delta \geq 0, \alpha + \beta + \delta/2 < 1 \quad (15)$$

이 안정성 조건은 Duan(1997)이 제시한 확장 GARCH(Augmented GARCH) 모형

의 안정성 조건에서 GJR-GARCH(1, 1)의 경우를 유도하여 구할 수 있다. <Appendix A>에 Duan(1997)의 확장 GARCH 모형과 GJR-GARCH(1, 1) 모형의 안정성 조건을 유도하는 방법에 대하여 소개하였다. 한편, Bollerslev and Wooldridge(1992)는 오차항의 확률분포가 정규분포를 따르지 않는 경우에도, 이를 정규분포로 가정하고 최우추정법(MLE, Maximum Likelihood Estimation)으로 추정한 추정량이 일치추정량(consistent estimator)이 되도록 하는 조건을 제시하였다.

이러한 방법으로 KOSPI 200 지수가격과 1일 동안 적용되는 무위험 이자율을 이용하여 GJR-GARCH(1, 1) 모형의 모수들을 추정한 후에, 몬테-카를로 시뮬레이션을 이용하여 m-기간 이후의 총 수익률의 확률밀도를 구하게 된다.

1기간 로그 수익률(log return)은 식 (16)처럼 되므로, m-기간 로그 수익률은 식 (17)이 되며 m-기간 총 수익률은 식 (18)처럼 된다.

$$\ln(S_{t+1}/S_t) = r_{f,t} + \mu + \epsilon_{t+1} \quad (16)$$

$$\ln(S_{t+m}/S_t) = \sum_{i=1, \dots, m} (r_{f,t-1+i} + \mu + \epsilon_{t+i}) \quad (17)$$

$$S_{t+m}/S_t = \exp\left[\sum_{i=1, \dots, m} (r_{f,t-1+i} + \mu + \epsilon_{t+i})\right] \quad (18)$$

ϵ_{t+i} 는 $N(0, h_{t+i})$ 분포로부터 추출되며, h_{t+i} 는 비대칭 GARCH의 모수를 추정하는 과정에서 구할 수 있다. 위와 같은 과정을 이용하여 현재시점의 기초자산의 가격이 주어졌을 때 m-기간 기초자산의 총 수익률에 대한 확률밀도를 구하게 된다.

Ⅲ. 연구의 자료

KOSPI 200 옵션시장은 1997년 7월 처음 거래가 시작된 이후에 급속한 성장을 하여 거래량을 기준으로 세계에서 가장 유동성이 풍부한 파생상품 시장이 되었다. 2000년대에 들어, KOSPI 200 옵션은 거래량을 기준으로 부동의 1위의 파생상품 자리를 지키고 있다. <표 1>은 논문의 표본기간 동안 세계 주요 파생상품 시장의 거래량을 추이를 보여준다. 2006년에는 KOSPI 200 옵션은 24억 계약이 체결되었으며, 이는 거래량 기준으로 세계 2위인 Eurodollar 선물과 비교해 4배가 넘는 수치이다.

〈표 1〉 2001년부터 2006년까지의 세계 주요 파생상품 시장의 거래량 추이

본 표는 본 연구의 표본기간인 2001년부터 2006년 까지 세계 주요 파생상품 시장의 계약 수(number of contract)를 기준으로 한 거래량의 순위를 보여준다. 순위는 2005년을 기준으로 정렬하였으며, 단위는 백만 계약이다.

순위	파생 상품 및 거래소	2001	2002	2003	2004	2005	2006
1	KOSPI 200 options, Korea Exchange	823.3	1,889.80	2,837.70	2,521.60	2,535.20	2,414.42
2	Eurodollar Futures, CME	184	202.1	208.8	297.6	410.4	502.08
3	Euro-Bund Futures, Eurex	178	191.3	244.4	239.8	299.3	319.89
4	10-year T-Note futures, CBOT	57.6	95.8	146.5	196.1	215.1	255.57
5	E-mini S&P 500 Index Futures, CBOT	39.4	115.7	161.2	167.2	207.1	257.93
6	Eurodollar Options, CME	88.2	105.6	100.8	130.6	188	268.96
7	Euribor Futures, Euronext.liffe	91.1	105.8	137.7	157.8	166.7	202.09
8	Euro-Bobl Futures, Eurex	99.6	114.7	150.1	159.2	158.3	167.31
9	Euro-Schatz Futures, Eurex	92.6	108.8	117.4	122.9	141.2	165.32
10	DJ Euro Stoxx 50 Futures, Eurex	37.8	86.4	116	121.7	140	213.51

KOSPI 200 옵션은 한 계약 단위가 10만원이며, 조기행사가 불가능한 유럽형 옵션이다. 항상 4개의 만기를 갖는 옵션들이 거래되는데, 결제월에 따라 연속 3개월물 3개와 원월물 1개로 구분된다. 예를 들어, 현재 시점이 2월 이라면 결제월은 3월, 4월, 5월과 7월의 4개이다. 연속 3개월물의 행사가격은 거래개시일 전날의 KOSPI 200 지수가격 증가에 가장 가까운 2.5배의 배수가 등가격 옵션의 행사가격으로 설정되고, 이를 기준으로 상, 하 4개씩 2.5P의 간격으로 총 9개의 행사가격이 설정된다. 원월물의 행사가격은 간격이 5P이며 총 5개의 행사가격이 설정된다.

시장구조는 선진 파생시장과는 달리, 지정시장조성자(designated market maker)가 존재하지 않는 주문주도시장(order-driven market)이다. KOSPI 200 옵션 시장은 9시에 시작하여 오후 3시 15분에 종료⁴⁾된다. 단, 최근월물 결제일의 경우 오후 2시 50분에 거래가 마감된다. 또한, 8시부터 9시까지의 pre-opening 시장을 가지며, 이때와 3시 5분부터 3시 15분 사이에는 단일가 매매가 시행되며 오전 9시부터 오후 3시 5분까지는 접속매매로 거래가 체결된다.

본 연구에서는 증권거래소(KRX)에서 제공하는 KOSPI 200 옵션의 1분 단위 체결가 자료와 KOSPI 200 지수의 1분 단위 자료 중 2001년 1월 1일부터 2006년 10월

4) 단, 연중 거래 첫 날과 수확능력시험 날에는 10시에 장이 시작되고, 9시부터 10시까지가 pre-opening 시장이 된다.

31일까지의 자료를 이용하여 일별 시계열 자료를 만든다. KOSPI 200 옵션 시장은 15시 15분까지 거래가 가능하나 KOSPI 200 지수는 15시까지만 거래되며, 그 지수가 거래시간 동안 매 1분마다 발표된다. 지수옵션과 지수옵션의 기초자산에 해당하는 지수 가격을 동기화(synchronize) 시키기 위하여 일별로 동일한 시간대에 지수 옵션과 지수 값을 동시에 추출⁵⁾한다. 이와 같이 만들어진 KOSPI 200 지수의 일별 자료를 이용하여 기초자산 수익률에 대한 상태확률모형의 모수들을 추정한다. <표 2>는 기초자산의 일별 로그 수익률의 기술통계량을 보여준다.

<표 2> KOSPI 200 지수의 일별 로그 수익률의 기술통계량

본 표는 2001년 1월 1일부터 2006년 10월 31일까지의 KOSPI 200 지수의 일별 로그 수익률에 대한 연년화된(annualized) 평균과 표준편차 값을 백분율로 보여주고, 왜도, 첨도 및 자크-베라(Jarque-Bera) 검정 통계량 및 유의 확률을 보여준다.

연평균수익률(%)	17.58
표준편차(%)	26.69
왜도	-0.36
첨도	6.84
Jarque-Bera 통계량	917.82
Jarque-Bera p-값	0.00

무위험 채권의 가격을 올바르게 가격결정하는 실증적 추계할인율을 추정하기 위하여 사용하는 무위험 채권가격은 유동성이 풍부한 3개월 CD91 금리로부터 계산한다.

추계할인율의 추정을 위한 옵션 자료를 만들 때 추정에 사용되는 옵션가격 자료가 신빙성이 있도록 하기 위해 Bakshi, Cao, and Chen(1997)이나 Rosenberg and Engle(2002)에서처럼 자료 선택기준(screening criteria)에 의해 옵션 자료를 추출한다. 본 연구에 사용되는 자료 선택기준은 다음과 같다.

첫 번째로, 다양한 만기의 옵션들 중에서 최근월물 자료만 추출한다. 원월물 옵션은 거래가 거의 되지 않고 차근월물의 거래량도 최근월물에 비하여 매우 작다. 최근월물의 결제일에서 조차, 최근월물의 거래량이 차근월물의 거래량의 5배가 넘고, 다른 날은 거래량의 차이가 훨씬 더 크다.

5) 추계할인율의 추정에 이용되는 외가격 콜옵션과 외가격 풋옵션의 분 단위 거래량을 추적하여 14시 50분 이전에 최종 거래가격이 있는 시점에서 지수 가격과 지수 옵션가격을 동시에 추출한다. 외가격 옵션은 거래가 매우 활발하므로 대부분의 거래일에서 14시 50분 혹은 이에 가까운 시점에서 자료가 추출된다.

두 번째로, 추정을 위한 샘플에 포함되려면 옵션가격이 0.03P보다 커야 하고 15P보다 작아야 한다. 또한 옵션가격이 무차익 하한거래경계(no-arbitrage lower bound)보다 커야 하며, 블랙-숄즈 모형이 의미하는 내재변동성이 0.05보다 크고 0.95보다 작아야 한다. 콜옵션의 경우 무차익 하한거래경계는 식 (19)처럼 되고 풋옵션의 경우는 식 (20)처럼 된다.

$$\text{Max}(S_t - D_{t,T} - Ke^{-r_f(T-t)}, 0) \quad (19)$$

$$\text{Max}(Ke^{-r_f(T-f)} - (S_t - D_{t,T}), 0) \quad (20)$$

그리고 내재변동성은 옵션의 가격, 기초자산의 가격, 배당의 현가, 무위험 이자율, 잔여 만기의 함수인 $\sigma(O_t; S_t - D_{t,T}, r_f, \tau)$ 이다. 이때, T 는 옵션의 만기 시점이고 τ 는 옵션의 잔존 만기를 나타낸다. τ 는 실제 날짜(calendar days)가 아니라 거래일(trading days)을 기준으로 계산된다. S_t 는 KOSPI 200 지수 가격이고, O_t 는 시장에서 관찰되는 KOSPI 200 옵션의 가격이다. K 는 행사가격을 나타내고 r_f 는 무위험 이자율을, $D_{t,T}$ 는 KOSPI 200 종목에 대한 배당액의 현가⁶⁾를 의미한다. 무위험 이자율은 일별 콜금리 자료를 이용하여 계산한다.

세 번째로, 추정을 위한 샘플에 포함되기 위해서는 위 조건들 이외에도, $(K/S_t - 1)$ 로 정의된 옵션의 가격도(moneyness)가 -0.1보다 크고 0.1보다 작아야 한다.

마지막으로, 위의 모든 조건을 만족시키는 옵션종목의 수가 그 날에 8개 이상인 경우에만 그 날을 샘플에 포함시킨다. 왜냐하면 모수를 잘 추정하기 위해서는 추정하는 시점에서 충분히 많은 수의 옵션이 필요하기 때문이다. 이렇게 선택된 일별 옵션자료를 가지고 월별로 잔여 만기가 거래일을 기준으로 20일에 가장 가까운 것들을 추출하여 월별 옵션자료를 만든다. 본 논문의 기준을 통해 선택된 옵션자료의 경우 만기가 정확히 20일 남는 것들은 위 조건을 만족시키는 옵션 종목수가 언제나 8개 이상이다.

옵션자료는 기초자산의 확률모형 추정기간보다 3개월 짧은 2001년 1월부터 2006

6) KOSPI 200 지수에 해당하는 종목의 대부분은 12월 결산법인으로 배당이 그 시점에 1년에 1회 지급되기 때문에 배당수익률로서 지수 값을 조정하는 것은 문제가 있다. 따라서 본 연구에서는 정혜욱, 안병국(2002)에서처럼 배당이 옵션의 만기 전에 있는 경우 실제 배당액의 현가를 이용하여 배당을 조정한다.

년 7월까지) 67개월 동안의 자료를 이용한다. <표 3>은 이 기간 동안에 위에서 설명한 자료 선택기준을 만족시키는 옵션 자료에 대한 요약 정보이다. 옵션 유형(콜/풋)에 대해 가격도 별로 옵션 관측치의 개수, 평균 가격, 블랙-숄즈 내재변동성을 보고한다. 풋옵션 가격이 콜옵션에 비해 평균적으로 비싼데, 이는 Bondarenko(2003)와 Isaenko(2007)등이 주장한대로, 풋옵션이 과대평가 되었을 수 있음을 암시한다. 또한 KOSPI 200 옵션시장에서는 변동성 미소(volatility smile) 현상을 확인할 수 있다.

<표 3> 옵션 자료

본 표는 2001년 1월부터 2006년 7월까지 매월 만기가 거래일을 기준으로 20일 남은 최근월물 옵션들을 추출한 뒤, 본문에서 제시된 옵션의 자료선택기준에 따라 채택된 옵션 표본을 옵션 유형(콜/풋) 및 가격도로 나누어 표본의 개수, 옵션가격평균, 블랙-숄즈 내재변동성을 계산한다. 가격도는 $(K/S-1)$ 로 정의하였고 K는 옵션의 행사가격, S는 KOSPI 200 주가지수를 나타낸다. 실제 옵션 자료를 이용하여 추계할인율의 모수를 추정할 때는 이 옵션 표본 자료에서 외가격 콜(가격도가 양의 값을 갖는 옵션)과 외가격 풋(가격도가 음의 값을 갖는 옵션)만을 사용한다.

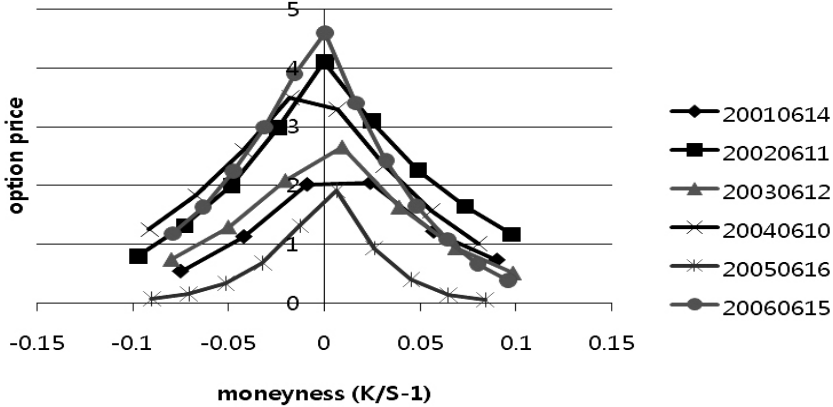
콜옵션				풋옵션			
가격도	개수	옵션가격평균	내재변동성	가격도	개수	옵션가격평균	내재변동성
$-0.1 < K/S-1 < -0.06$	78	9.001	26.21	$0.06 < K/S-1 < 0.1$	94	9.202	29.96
$-0.06 < K/S-1 < -0.03$	85	6.567	24.65	$0.03 < K/S-1 < 0.06$	86	6.655	29.02
$-0.03 < K/S-1 < 0$	81	4.217	24.62	$0 < K/S-1 < 0.03$	86	4.338	28.44
$0 < K/S-1 < 0.03$	87	2.546	25.16	$-0.03 < K/S-1 < 0$	82	2.620	28.10
$0.03 < K/S-1 < 0.06$	88	1.397	25.08	$-0.06 < K/S-1 < -0.03$	89	1.512	28.72
$0.06 < K/S-1 < 0.1$	99	0.686	25.56	$-0.1 < K/S-1 < -0.06$	110	0.784	30.08

실제 옵션자료를 이용하여 추계할인율을 추정할 때 콜옵션과 풋옵션 자료를 모두 사용하면 풋-콜 패리티(put-call parity)때문에 정보가 중복되는 문제가 있다. 따라서 본 연구에서는 Rosenberg and Engle(2002)에서처럼 옵션의 가격도가 양의 값으로 정의된 외가격 콜옵션과 음의값으로 정의된 외가격 풋옵션 자료만을 이용하여 추계할인율을 추정한다. <그림 1>은 본 연구에서 사용되는 표본기간 동안 매 6월마다 가격도에 따른 외가격 콜옵션과 외가격 풋옵션의 가격변화를 보여준다. <그림 1>에서 살펴볼 수 있듯이 같은 가격도를 갖는 옵션의 가격과 옵션가격의 가격도에 대한 민감도가 시간이 지남에 따라 변하는 것을 알 수 있다. 이는 투자자들의 미래 상태에 대한 주관적 확률분포와 위험회피도가 시간에 따라 변함을 암시한다.

7) 3개월 만기 채권의 가격을 결정하는 제약을 주도록 하기 위하여 이와 같이 표본기간을 설정한다.

<그림 1> 가격도에 따른 옵션가격의 변화

본 그림은 본 연구에서 사용되는 표본기간 중 매년의 6월 마다 가격도 (K/S-1)에 따른 옵션가격 변화를 보여준다. 가격도가 양수인 구간에서는 외가격 콜(가격도가 양의 값을 갖는 옵션)의 가격 자료를 이용하였고, 가격도가 음수인 구간에서는 외가격 풋(가격도가 음의 값을 갖는 옵션)의 가격자료를 이용하였다.



IV. 기초자산의 확률모형과 실증적 추계할인율의 추정

제 II 장 제 4절에서 제시된 KOSPI 200 지수의 상태확률모형의 모수들을 추정한 결과는 <표 4>와 같다.

<표 4> KOSPI 200 지수의 수익률에 대한 상태 확률 모형의 추정치

본 표는 2001년 1월 1일부터 2006년 10월 31일까지 일별 KOSPI 200 지수 가격을 이용하여 비대칭 GARCH(1, 1) 모형의 모수에 대한 추정치와 T-통계량 값을 보여준다.

평균 방정식 : $\ln(S_t/S_{t-1}) - r_{f,t-1} = \mu + \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}, \epsilon_t | I_{t-1} \sim f(0, h_t)$

분산 방정식 : $h_t = w + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \delta \text{Max}[0, -\epsilon_{t-1}]^2$

안정성 조건 : $w > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \delta \geq 0, \alpha + \beta + \delta/2 < 1$

	추정치	T-통계량
μ	6.81E-04	1.68
θ	0.065	2.15
w	3.88E-06	3.59
α	0.026	2.39
β	0.914	72.78
δ	0.090	6.50

오차항의 비대칭을 표현하는 계수인 δ 값이 통계적으로 유의하게 추정된 것으로 보아 KOSPI 200 지수의 수익률과 변동성간에 비대칭 반응현상이 존재함을 알 수 있고, 비대칭 GARCH 모형의 사용이 적절했음을 알 수 있다.

옵션 자료는 만기가 20일 남은 것들만 추출되었으므로, 추정된 모수들을 이용하여 기초자산의 20-기간 수익률의 확률분포를 앞에서 설명한 200,000번의 몬테-카를로 시뮬레이션을 통해 구한다. 이렇게 발생한 기초자산의 확률분포와 현재 시점에서 시장에서 거래되는 옵션가격들을 가지고 제 II 장 제 3절에서 제시된 추계할인율들의 모수를 추정하게 된다. 단, 다항식을 이용하여 추계할인율을 추정할 때는 각각의 다항식이 직교(orthogonal)하도록 모형화하였으므로 다항식의 개수를 4개로 제한해서 추정하여도 충분하다. 또한, 다항식 추계할인율을 성공적으로 추정하기 위하여, 발생한 기초자산의 수익률을 $[-30\%, 30\%]$ 로 제한⁸⁾한다. 추계할인율의 모수는 월별로 한번씩 추정되므로 각각의 모수 별로 총 추정치의 개수는 67개가 된다.

<표 5>는 멱함수 추계할인율과 다항식 추계할인율에 대하여 각각 채권가격을 이용하지 않고 옵션 자료만 가지고 추정했을 때와 주어진 채권가격을 정확히 추정하도록 제약을 주고 추정했을 때의 모수들의 추정치의 기술통계량을 보여준다.

<표 5>에서 볼 수 있듯이, 멱함수 추계할인율의 경우 채권의 가격을 정확히 추정하도록 제약을 주면 조정계수인 $\theta_{0,t}$ 의 추정치는 1을 중심으로 큰 편차가 없도록 추정된다. 위험회피도를 의미하는 $\theta_{1,t}$ 는 채권가격을 추정에 사용 했을 때나 옵션가격만 사용했을 때나 월별 추정치들간의 분산에 큰 차이는 없다.

이제 기초자산의 수익률의 함수인 실증적 추계할인율의 성격을 알아보기 위해 추정된 계수를 이용하여 실증적 추계할인율이 기초자산 수익률의 변화에 따라 어떻게 변하는지를 살펴본다. <그림 2>는 멱함수 추계할인율과 다항식 추계할인율이 KOSPI 200 옵션의 기초자산인 KOSPI 200 지수의 총 수익률과 어떤 관계를 갖는지를 표본기간의 매 6월 마다 살펴본 것이다. <그림 2>의 Panel A에서 멱함수 추계할인율의 기울기가 시간에 따라 변하는 것은 실증적 위험회피도가 시간에 지남에 따라 변함을 의미한다. 또한 대부분의 기간에서 멱함수 추계할인율이 음의 기울기를 갖는 것은 투자자들이 KOSPI 200 지수의 수익률이 커짐에 따라 한계 효용(marginal

8) Rosenberg and Engle(2002)에서는 $[-10\%, 10\%]$ 로 제한하였다. 본 논문에서는 이보다 더 일반화 된 구간인 $[-30\%, 30\%]$ 로 제한한다. 일부를 제외하고 대부분 발생한 기초자산의 수익률이 이 구간 안에 속한다. 멱함수 추계할인율을 추정할 때는 기초자산의 수익률 범위에 대한 제약이 필요 없다.

<표 5> 실증적 추계할인율 모수의 추정치에 대한 기술 통계량

본 표는 멱함수 추계할인율과 다항식 추계할인율의 모수를 기초자산의 확률 분포와 KOSPI 200 옵션가격을 이용하여 추정된 추정치를 보여준다. 또한 3개월 CD91금리로부터 구한 채권의 가격을 정확하게 가격결정 하도록 제약을 주고도 추정한다. <Panel A>는 멱함수 추계할인율의 모수를 추정한 경우, <Panel B>는 멱함수 추계할인율이 채권가격을 정확히 결정하도록 제약을 주고 추정한 경우, <Panel C>는 다항식 추계할인율의 모수를 추정한 경우, <Panel D>는 다항식 추계할인율이 채권가격을 정확히 결정하도록 제약을 주고 추정한 경우이다.

$$\text{멱함수 추계할인율} : M^*(r_T; \theta_t) = \theta_{0,t}(r_T)^{-\theta_{1,t}}$$

$$\text{다항식 추계할인율} : M^*(r_T; \theta_t) = \theta_{0,t}T_0(r_T) \exp[\theta_{1,t}T_1(r_T) + \theta_{2,t}T_2(r_T) + \dots + \theta_{N,t}T_N(r_T)],$$

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$$

	평 균	중앙 값	표준편차	최소 값	최대 값
<Panel A> 멱함수 추계할인율의 모수에 대한 추정치					
θ_0	0.9306	0.9053	0.1954	0.5425	1.5388
θ_1	1.5176	1.3376	1.1585	-0.0695	6.6687
<Panel B> 멱함수 추계할인율의 모수에 대한 추정치(채권 가격 고려)					
θ_0	0.9974	0.9968	0.0079	0.9558	1.0085
θ_1	1.4313	1.2923	1.0271	-0.0401	5.4135
<Panel C> 다항식 추계할인율의 모수에 대한 추정치					
θ_0	0.8025	0.7187	0.5764	0.008	2.7279
θ_1	-0.8043	-0.0598	1.8064	-6.79	1.7145
θ_2	-0.6451	-0.3969	1.1754	-5.0751	1.1752
θ_3	-0.0122	0.2313	0.6801	-2.2333	0.9682
<Panel D> 다항식 추계할인율의 모수에 대한 추정치(채권 가격 고려)					
θ_0	0.8325	0.7333	0.602	0.0054	2.993
θ_1	-0.7651	-0.0527	1.7764	-7.4676	1.5639
θ_2	-0.5985	-0.3486	1.2041	-5.5146	1.2736
θ_3	-0.0013	0.2106	0.6692	-2.4507	0.9391

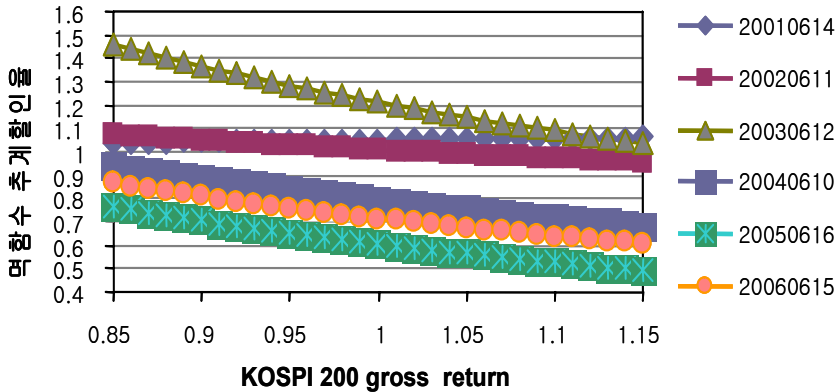
utility)이 감소함을 의미한다. 이와 같은 특성은 우리가 일반적인 자산가격결정모형에서 기대할 수 있는 성질이다. 자산가격결정모형들은 대부분 시장상황이 좋지 않은 경우에 높은 수익률을 갖는 자산에 더 높은 가격을 할당한다. 이는 곧 추계할인율이 일반적으로 음의 기울기를 가져야 함을 의미한다. 이 그림의 또 다른 특성을 보면, 추계할인율들이 대부분의 경우 거의 선형과 유사한 형태를 갖는다. 이와 같은

형태는 멱함수 추계할인율이 소위 사려도(prudence)를 제대로 추정할 수 없음을 나타내준다. 멱함수 형태의 근본적 한계로 추계할인율이 선형에서 벗어나는 형태로 추정되는 것이 힘들고 이에 따라 추계할인율이 실제 가격을 추정하는 경우 자산의 현금흐름이 특정영역에 집중되는 경우 추정가격이 왜곡될 수 있는 가능성을 보여준다. <그림 2>의 Panel B는 다항식 추계할인율과 기초자산 수익률과의 관계가 시간

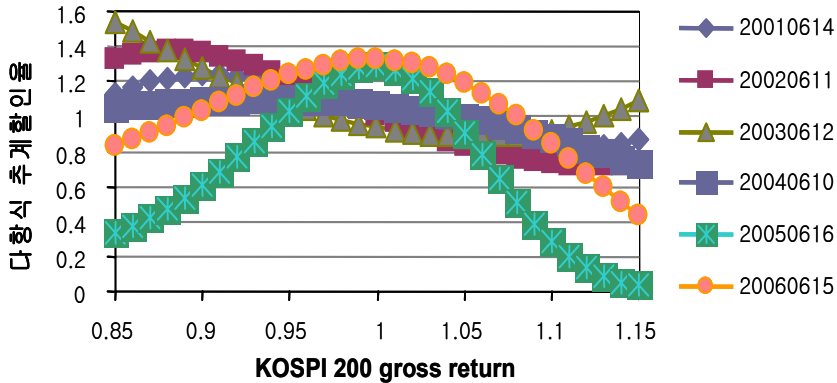
<그림 2> 2001년부터 2006년까지의 6월에서의 실증적 추계할인율

본 그림은 논문의 표본기간 동안 매년 6월에서의 실증적 추계할인율이 KOSPI 200 지수의 총 수익률과 어떤 관계를 갖는지 보여준다. <Panel A>는 멱함수 추계할인율에 대한 추이를, <Panel B>는 다항식 추계할인율에 대한 추이를 보여준다. 멱함수 추계할인율의 기울기가 시간이 지남에 따라 변하는 것은 실증적 위험회피도가 변하는 것을 반영한다.

<Panel A> 멱함수 추계할인율



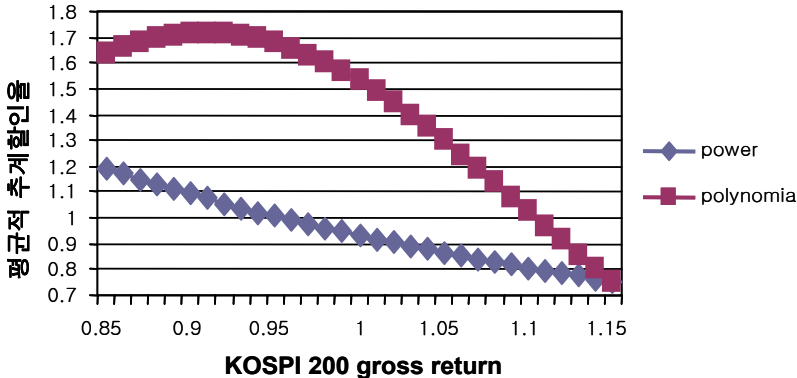
<Panel B> 다항식 추계할인율



이 지남에 따라, 멱함수 추계할인율에 비해 상대적으로 큰 폭으로 변함을 보여준다. 또한 다항식 추계할인율은 기초자산의 수익률의 상태에 따라 보다 더 큰 변화를 보인다. 다항식 추계할인율은 일반적으로 음의 기울기를 갖는다는 점에서 멱함수 추계할인율과 유사한 성격을 갖고 있으나 그 형태가 선형과 벗어난 형태를 보여주고 있다. 이는 멱함수 추계할인율보다 더 다양한 형태를 표현할 수 있는 다항식 추계할인율의 장점을 보여주며, 현실적으로 투자자들의 위험회피도나 사려도가 시간에 따라 모두 변화할 수 있음을 보여준다. <그림 3>은 추정된 보수의 평균 값을 이용하여 추계할인율을 구성하였을 때 시간에 따라 변하지 않는 평균적 멱함수 추계할인율과 역시 시간에 따라 변하지 않는 평균적 다항식 추계할인율 각각이 기초자산 수익률과 어떤 관계를 갖는지 보여준다. <그림 2>와 <그림 3>에서 살펴볼 수 있듯이, 다항식 추계할인율이 멱함수 추계할인율에 비해 기초자산 수익률의 변화에 더 민감한 변화를 보인다. 추계할인율의 상태에 대한 변화의 폭이 클수록 좀더 정확한 가격결정을 할 수 있을 것이므로, 다항식 추계할인율의 실증 성과가 좋을 수 있다고 예상할 수 있다.

<그림 3> 시간불변하는 평균적 추계할인율

본 그림은 시간불변하는 평균적 개념의 멱함수 추계할인율과 평균적 개념의 다항식 추계할인율 각각이 KOSPI 200 지수의 총 수익률과 어떤 관계를 갖는지 보여준다.



또한, <그림 3>에서 평균적으로 다항식 추계할인율이 멱함수 추계할인율보다 기초자산의 수익률이 큰 음수 값을 가질 때 더 큰 값을 가짐을 보여주고 있다. 투자자들은 경기가 불황일 때 즉 미래에 나쁜 상황(bad state)일 때 상대적으로 높은 보수

를 제공하는 자산에 대하여 매력적으로 생각하게 되고, 해당 자산의 가격을 높게 평가한다. 다항식 추계할인율은 이러한 투자자들의 특성을 잘 묘사하기 때문에 뒤에서 논의될 실증 성과가 좋을 수 있다.

V. 실증적 추계할인율을 이용한 실증 성과의 비교

1. 내표본 가격결정력과 외표본 예측력 비교

이번 장에서는 추정된 실증적 추계할인율을 이용하여 등가격 콜(풋)옵션과 외가격 콜(풋)옵션에 대한 내표본 가격결정력과 외표본 예측력을 비교해 본다. 외표본의 기간은 거래일을 기준으로 1일 후, 2일 후, 5일 후로 설정한다. 등가격 콜(풋)옵션은 $(K/S_t - 1)$ 로 정의된 옵션의 가격도가 0에 가장 가까운 행사가격을 갖는 콜(풋)옵션으로 선택한다. 외가격 콜(풋)옵션은 옵션의 가격도가 0.05(-0.05)보다 큰(작은) 것들 중에서 0.05(-0.05)에 가장 가까운 행사가격을 갖는 콜(풋)옵션으로 선택한다. 단, 동일한 행사가격을 갖는 옵션을 가지고 외표본 예측력을 비교하기 위해 현재 시점과 외표본의 최장 기간까지의 거래일에서 모두 해당 행사가격을 갖는 옵션이 존재⁹⁾해야 한다. 이 조건에 맞는 외가격 콜(풋)옵션이 존재 하지 않으면 외가격 콜(풋)옵션을 가격도가 0.05(-0.05)보다 작으면서(크면서) 0.05(-0.05)에 가장 가까운 행사가격을 갖는 콜(풋)옵션이 되도록 선택한다.

추계할인율을 시간에 따라 변하도록 하였을 때와 시간에 따라 변하지 않는 평균적인 추계할인율을 이용 했을 때 가격결정력과 예측력의 차이가 있는지 살펴보기 위하여, 제 IV장에서 추정된 시간에 따라 변하는 추계할인율의 모수들의 평균 값을 이용하여 시간불변(time-invariant) 추계할인율을 만든다. 또한, 단기 채권가격을 정확히 가격결정하는 추계할인율과 옵션의 가격만 고려하여 추정된 추계할인율의 가격결정력과 예측력의 차이도 비교 해 본다.

콜옵션과 풋옵션은 보수가 다를 뿐 추계할인율의 추정과정과 실증분석절차가 유사하므로 본장에서는 콜옵션에 대한 절차만 설명하기로 한다. 기초자산의 수익률이 본 논문에서 가정된 비대칭 GARCH(1, 1) 모형을 따를 때, 추정된 실증적 추계할인

9) 이러한 샘플의 구성의 원리는 다음 장에서 헤지 성과를 살펴 볼 때도 마찬가지로 적용된다.

율로부터 콜옵션의 가격은 식 (21)과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} C_{i,t}(\hat{\theta}_t) &= E_t \left[M(r_{t,T}; \hat{\theta}_t) \max(S_T - K, 0) \right] \\ &= E_t \left[M(r_{t,T}; \hat{\theta}_t) \max \left(S_t \exp \left(\sum_{i=1}^m [r_{f,t-1+i} + \mu + \epsilon_{t+i}] \right) - K, 0 \right) \right] \\ \text{단, } T &= t + m \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)은 식 (22)와 같이 몬테-카를로 시뮬레이션을 이용하여 근사화 시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} C_{i,t}(\hat{\theta}_t) &\cong \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \left[M(r_{t,T,j}; \hat{\theta}_t) \max(S_{T,j} - K, 0) \right] \\ &= \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \left[M(r_{t,T,j}; \hat{\theta}_t) \max(S_t R_{t,T,j} - K, 0) \right] \\ \text{단, } R_{t,T,j} &= \exp \left(\sum_{i=1}^m [r_{f,t-1+i} + \mu + \epsilon_{t+i}] \right) \Bigg|_j \end{aligned} \quad (22)$$

실증적 추계할인율이 얼마나 옵션의 가격결정을 잘 하는지 살펴보기 위하여, 추정된 실증적 추계할인율을 이용하여 계산한 옵션의 이론가격과 시장에서 관찰되는 옵션가격과의 차이를 살펴본다. 본 논문에서는 식 (23)으로 정의된 내표본 가격결정 오차의 백분율에 대하여 평균과 표준편차를 구하게 된다.

$$100 \times \left| (C_{i,t}(\hat{\theta}_t) - C_{i,t}^{Market}) / C_{i,t}^{Market} \right| \quad (23)$$

또한, 실증적 추계할인율을 이용하여 외표본 예측력의 측정을 위해 현재시점의 실증적 추계할인율을 이용하여 계산한 거래일 기준의 1일, 2일 및 5일 후의 이론적인 옵션가격과 각시점에서 시장에서 관찰되는 옵션가격과의 차이를 살펴본다. 내표본 가격결정력은 일반적으로 모수의 개수가 증가함에 따라 향상되는 경향이 있다. 그러나 김솔(2008)의 지적대로 외표본 기간에서는 모수의 개수가 증가하면 과적합(overfitting) 문제를 야기시킬 수 있기 때문에, 외표본 검증을 통하여 가격결정력에 대한 결과가 단순히 모수의 수가 증가했기 때문인지를 판단 할 수 있다. 또한 모수들의 시간에 따른 안정성을 살펴볼 수 있다. 본 논문에서는 식 (24)처럼 정의된 외표본 예측 오차의 백분율에 대하여 평균과 표준편차를 구하게 된다.

$$100 \times \left| (C_{i,t+k}(\hat{\theta}_t) - C_{i,t+k}^{Market}) / C_{i,t+k}^{Market} \right| \quad \text{단, } k=1, 2, 5 \quad (24)$$

〈표 6〉 콜옵션 및 풋옵션 에 대한 내표본 가격결정력 및 외표본 예측력 비교

추정된 추계할인율의 등가격 콜옵션과 외가격 콜옵션에 대한 내표본 가격결정력과 1일, 2일 및 5일 외표본 예측력을 아래의 평균과 표준편차 추도로 살펴본다. [Part 1]은 콜옵션에 대한 결과이고, [Part 2]는 풋옵션에 대한 결과 값이다. 각 Panel은 추계할인율을 옵션 자료만 가지고 추정할 경우와 채권 가격을 정확히 결정하도록 제약을 주고 추정한 경우에 각각 등가격 옵션과 외가격 옵션에 대한 내표본 가격결정력과 외표본 예측력의 오차의 평균과 표준 편차를 보여준다. Panel A는 시변하는 벡합수 추계할인율의 경우, Panel B는 시변하는 다항식 추계할인율의 경우, Panel C는 시간불변하는 벡합수 추계할인율의 경우, Panel D는 시간불변하는 다항식 추계할인율의 경우이다.

내표본 가격결정력 추도 : $mean(100|(C_{i,t}^{Market}) - C_{i,t}^{Market})/C_{i,t}^{Market}|)$ 과 $std(100|(C_{i,t}(\hat{\theta}_i) - C_{i,t}^{Market})/C_{i,t}^{Market}|)$
 외표본 예측력 추도 : $mean(100|(C_{i,t+\Delta}(\hat{\theta}_i) - C_{i,t+\Delta}^{Market})/C_{i,t+\Delta}^{Market}|)$ 과 $std(100|(C_{i,t+\Delta}(\hat{\theta}_i) - C_{i,t+\Delta}^{Market})/C_{i,t+\Delta}^{Market}|)$

[Part 1] 콜옵션

<Panel A> 시변하는 벡합수 추계할인율(time-varying power pricing kernel)

채권 가격을 고려하지 않은 경우		채권 가격을 고려한 경우															
내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본										
외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격										
평균	16.98	6.33	17.35	9.42	21.49	10.16	28.85	12.72	평균	44.55	15.54	41.07	14.50	46.38	16.68	49.00	14.67
표준편차	19.43	5.82	17.10	7.29	23.08	12.35	28.04	13.75	표준편차	50.92	14.09	44.72	14.07	49.17	17.46	55.64	17.04

<Panel B> 시변하는 다항식 추계할인율(time-varying orthogonal polynomial pricing kernel)

채권 가격을 고려하지 않은 경우		채권 가격을 고려한 경우															
내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본										
외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격										
평균	1.44	1.00	11.58	5.58	15.59	7.78	25.98	10.45	평균	2.41	1.12	12.18	5.62	16.03	7.85	26.55	10.03
표준편차	1.43	1.17	8.65	4.17	16.35	10.81	21.83	11.32	표준편차	2.62	1.07	9.07	4.24	16.57	11.03	21.90	11.68

<Panel C> 시불변하는 멱함수 추계할인율(time-invariant power pricing kernel)

채권 가격을 고려하지 않은 경우		채권 가격을 고려한 경우						
내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	
외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	
평균	43.59	13.94	40.17	14.47	45.58	16.07	49.71	15.60
표준편차	49.91	15.73	44.94	14.46	46.98	17.45	53.26	16.87
평균	48.42	16.36	44.19	15.57	50.07	17.57	53.97	16.81
표준편차	56.76	17.92	51.37	17.17	53.67	19.45	61.22	18.70

<Panel D> 시불변하는 다항식 추계할인율(time-invariant orthogonal polynomial pricing kernel)

채권 가격을 고려하지 않은 경우		채권 가격을 고려한 경우						
내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	
외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	
평균	55.09	30.93	51.18	31.01	56.75	33.12	64.06	36.33
표준편차	60.91	28.45	57.31	27.86	59.38	29.52	71.64	28.18
평균	55.58	31.03	51.51	31.03	57.02	33.16	64.41	36.24
표준편차	61.95	28.48	58.20	27.86	60.37	29.40	72.42	27.99

[Part 2] 풋옵션

<Panel A> 시변하는 멱함수 추계할인율(time-varying power pricing kernel)

채권 가격을 고려하지 않은 경우		채권 가격을 고려한 경우						
내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	
외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	외가격 등가격	
평균	10.61	6.03	17.29	8.73	23.27	11.12	34.00	16.26
표준편차	9.10	4.56	16.08	7.63	20.42	9.34	37.85	14.35
평균	27.33	10.24	30.26	12.32	34.44	13.32	42.50	16.07
표준편차	26.42	10.04	30.17	11.72	30.21	11.32	40.42	17.57

<Panel B> 시변하는 다항식 추계활인율(time-varying orthogonal polynomial pricing kernel)

		채권 가격을 고려하지 않은 경우					채권 가격을 고려한 경우				
		내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	5일 외표본	
외가격 등가격 외가격		외가격	등가격	외가격	등가격	외가격	등가격	외가격	등가격	외가격	등가격
평균	1.19	0.97	10.53	6.27	16.65	8.19	26.79	13.02	27.50	7.74	27.50
표준편차	0.81	0.88	8.76	5.56	16.94	7.39	28.19	13.21	30.36	7.12	30.36
						평균	1.40	0.91	11.08	6.05	17.37
						표준편차	1.21	0.86	9.32	5.38	17.35

<Panel C> 시불변하는 멱함수 추계활인율(time-invariant power pricing kernel)

		채권 가격을 고려하지 않은 경우					채권 가격을 고려한 경우				
		내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	5일 외표본	
외가격 등가격 외가격		외가격	등가격	외가격	등가격	외가격	등가격	외가격	등가격	외가격	등가격
평균	32.90	14.86	34.38	15.98	35.64	16.03	40.59	15.96	45.28	17.23	45.28
표준편차	29.76	14.92	33.27	13.47	31.02	11.98	36.85	16.40	40.42	14.01	40.42
						평균	36.58	16.42	37.83	17.00	39.53
						표준편차	32.77	16.41	36.81	15.71	34.19

<Panel D> 시불변하는 다항식 추계활인율(time-invariant orthogonal polynomial pricing kernel)

		채권 가격을 고려하지 않은 경우					채권 가격을 고려한 경우				
		내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	내표본	1일 외표본	2일 외표본	5일 외표본	5일 외표본	
외가격 등가격 외가격		외가격	등가격	외가격	등가격	외가격	등가격	외가격	등가격	외가격	등가격
평균	51.12	43.01	52.72	43.88	54.92	45.02	66.32	51.68	67.03	55.58	67.03
표준편차	41.07	23.17	43.16	23.85	43.50	23.47	50.62	27.85	50.94	23.49	50.94
						평균	51.81	42.91	53.43	43.77	55.58
						표준편차	41.34	23.18	43.51	23.84	43.86

<표 6>은 콜옵션 및 풋옵션에 대한 추계할인율들의 내표본 가격결정력 및 외표본 예측력을 비교한 것이다. 가격결정 오차와 예측 오차가 측도가 작을수록 실증성과가 뛰어난 것이다. <표 6>의 결과는 추계할인율의 함수형태에 관계없이, 시간에 따라 변하는 추계할인율을 사용한 경우가 시간에 따라 변하지 않는 평균적인 추계할인율을 사용한 경우에 비하여 가격결정력과 예측력이 언제나 우월함을 보여준다. 이는 추계할인율을 비롯하여, 미래상태에 대한 투자자들의 주관적 확률분포 및 위험회피도와 사려도등이 실제로 시변함을 암시한다.

또한, 시간에 따라 변하는 추계할인율의 경우, 다항식 추계할인율이 멱함수 추계할인율보다 가격결정 오차와 예측 오차가 훨씬 작음을 보여주고 있다. 다항식 추계할인율의 내표본 가격결정력이 현저히 우월하며, 외표본 기간이 길어질수록 멱함수 추계할인율과의 예측 오차의 차이가 약간 줄어드나, 여전히 성과가 좋다. 이는 다항식 추계할인율이 단순히 모수의 수가 많아서 가격결정을 잘 하는 것이 아니라, 복잡하고 유연한 형태의 추계할인율이 옵션가격을 더 잘 반영하여 실증적 추계할인율을 추정해 내기 때문일 것이다. 특히 앞장에서 살펴보았듯이, 다항식 추계할인율은 기초자산의 수익률 상태변화에 민감하게 큰 폭으로 변화하기 때문에, 투자자들의 상태에 따른 주관적인 확률분포를 좀 더 잘 잡아낼 수 있으므로 가격결정력 성과가 뛰어난 것으로 판단된다. 그러나 시간불변 추계할인율의 경우 멱함수 추계할인율이 오히려 성과가 더 좋았다. 이는 평균적인 추계할인율을 사용할 때는 단순한 모형이 실증성과가 뛰어날 수 있음을 의미한다.

시간에 따라 변하는 추계할인율의 경우 채권가격을 정확히 가격결정 하도록 제약을 주고 추계할인율을 추정하면 멱함수 추계할인율의 경우 가격결정력과 예측력 성과가 훨씬 나빠지지만, 다항식 추계할인율의 경우 그 차이가 크지 않다. 추계할인율의 모수를 추정할 때, 채권가격을 정확히 결정하도록 제약 주는 것은, 모형의 유연성을 떨어뜨리는 것이라고 할 수 있다. 다항식 추계할인율의 경우 모수가 4개에서 3개로 하나 줄어드는 효과를 내고, 멱함수 추계할인율의 경우 모수가 2개에서 하나 줄어드는 셈이므로, 멱함수 추계할인율의 경우가 가격결정력의 저하 정도가 상대적으로 더 심각한 것이다. 이는 제 IV장에서 살펴보았듯이, 채권가격결정제약을 주고 멱함수 추계할인율을 추정하면 스케일 모수인 θ_0 가 1을 중심으로 변동이 거의 없도록 추정되는 것과 관련이 있다. 이러한 결과는 복잡한 형태의 추계할인율은 다른 자산의 가격을 결정하도록 하는 제약을 주어도 가격결정이나 예측 등을 좀 더 유연

하계 할 수 있음을 의미하고, 나아가 옵션가격으로부터 구한 다항식 형태의 추계할 인율을 다른 자산의 가격결정에도 사용해 볼 수 있음을 암시한다.

2. 헤지 성과 비교

본 장에서는 앞장에서 고려한 다양한 형태의 실증적 추계할인율에 대하여 헤지 성과를 여러 가지 헤지 방법을 가지고 평가해 본다. 우선 델타 헤지와 감마 헤지를 하기 위해 유한차분법(FDM, Finite Difference Method)을 이용하여 콜(풋)옵션의 델타 값과 감마 값을 구한다. 본 장에서도 콜옵션의 헤지 절차만 설명하기로 한다.

1일 후의 기초자산의 가격은 Rosenberg and Engle(2002)에서와 마찬가지로 아래와 같이 3개의 값을 갖는다고 가정하자.

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t + \epsilon \\ S_t \\ S_t - \epsilon \end{cases} \quad (25)$$

이때 옵션 델타와 감마는 1일 후의 기초자산의 가격에 따른 옵션가격을 이용하여 아래와 같이 추정할 수 있다.

$$\text{델타} : \frac{\partial C_{t+1}}{\partial S_{t+1}} \cong \frac{C_{t+1|S_t+\epsilon} - C_{t+1|S_t-\epsilon}}{2\epsilon} \quad (26)$$

$$\text{감마} : \frac{\partial^2 C_{t+1}}{\partial S_{t+1}^2} \cong \frac{C_{t+1|S_t+\epsilon} - 2C_{t+1|S_t} + C_{t+1|S_t-\epsilon}}{\epsilon^2} \quad (27)$$

한편 1일 간의 기초자산의 변동폭인 ϵ 의 크기는 아래와 같이 결정한다. 이와 같이 결정된 ϵ 를 사용하여 헤지를 하였을 때 헤지 성과를 가장 적절히 추정할 수 있기 때문이다. ϵ_{t+1} 가 표준편차인 $\sqrt{h_{t+1}}$ 만큼 증가하면, $S_{t+1} = S_t \exp(r_{f,t} + \mu + \sqrt{h_{t+1}})$ 이 된다. ϵ 는 $\epsilon = S_{t+1} - S_t$ 이므로, ϵ 의 값은 식 (28)과 같이 결정된다.

$$\epsilon = S_t [\exp(r_{f,t} + \mu + \sqrt{h_{t+1}}) - 1] \quad (28)$$

델타와 감마를 구하기 위해, t+1시점에 기초자산의 가격인 S_{t+1} 가 주어졌을 때, t 시점에서 구한 실증적 추계할인율을 이용한 콜옵션의 가격은 식 (29)와 같이 결정된다.

$$\begin{aligned}
 C_{t+1|S_{t+1}} &= E_{t+1|S_{t+1}}[M(r_{t,T,j}; \hat{\theta}_t) \text{Max}(S_T - K, 0)] \\
 &= E_{t+1|S_{t+1}}[M(r_{t,T,j}; \hat{\theta}_t) \text{Max}(S_{t+1}R_{t+1,T} - K, 0)] \\
 \text{단, } R_{t+1,T} &= \exp\left(\sum_{i=2}^m [r_{f,t-1,i} + \mu + \epsilon_{t+i}]\right) \text{ 이고 } T = t+m
 \end{aligned} \tag{29}$$

$E_{t+1|S_{t+1}}[\cdot]$ 는 S_{t+1} 를 알고 있을 때 t+1시점에서 확률변수(random variable)에 대한 조건부 기대치 연산자이다. 이 콜옵션의 가격은 앞장에서와 마찬가지로, 몬테-카를로 시뮬레이션을 이용하여 구하게 된다.

헤지 성과는 외가격 콜(풋)옵션 매도 포지션에 대하여 헤지 포트폴리오를 구성하여 비교하게 되는데 아래의 세 가지 기준에서 평가된다. 첫째로 기초자산을 이용하여 델타 헤지하는 경우, 둘째로 등가격 콜(풋)옵션을 이용하여 델타 헤지하는 경우, 마지막으로 기초자산과 등가격 콜(풋)옵션을 모두 이용하여 델타 및 감마 헤지를 하는 경우이다.

경우 1 : 기초자산을 이용하여 델타 헤지

경우 2 : 등가격 옵션을 이용하여 델타 헤지

경우 3 : 기초자산과 등가격 옵션을 이용하여 델타 및 감마 헤지

전체 데이터 기간 동안에 대해 동등한 헤지 성과 비교를 위하여, 매월 외가격 옵션 1개가 아닌 100P에 해당하는 외가격 옵션 개수만큼을 헤지 한다. 예를 들어, 1월에는 헤지하고자 하는 외가격 옵션의 가격이 2P라면 50개를 헤지하고, 2월에 외가격 옵션의 가격이 2.5P라면 40개를 각각 헤지 한다. 각 경우에 대하여 헤지 포트폴리오와 시장에서 관찰된 옵션가격과의 차이를 헤지 오차(hedge error)로 정의한다. 본 논문에서는 Bakshi et al.(1997)의 방법론을 따라서 식 (30)과 같이 이 헤지 오차의 절대값의 평균과 표준편차를 헤지 성과에 대한 측도로 삼는다. 본 논문의 경우 Δt 가 1, 2, 5인 경우, 즉 1일, 2일 그리고 5일 단위 헤지 오차를 구하게 된다.

$$\text{헤지 오차의 절대 값의 평균} : \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M |H(t+l\Delta t)|$$

$$\text{헤지 오차의 절대값의 표준편차} : std(|H(t+l\Delta t)|) \quad (30)$$

각 경우 별로 아래와 같은 과정을 통해 헤지 오차를 구하게 된다. 아래의 식들은 외가격 옵션 1개를 1일 헤지하는 절차를 보여준다. 실제로는 100P 만큼의 외가격 옵션을 헤지를 하여야 하므로, 100P를 현재 외가격 옵션가격으로 나눈 수만큼의 옵션에 대하여 헤지를 하고 헤지 오차를 구하면 되고, 2일이나 5일 구간의 헤지 절차도 이와 유사하다.

경우 1 : 기초자산을 이용하여 델타 헤지

C_{OTM_t} 는 t시점에서의 외가격 옵션의 시장 가격이고, $P_t = \Delta_{OTM_t} S_t + X_t$ 인 P_t 는 t시점에서의 헤지 포트폴리오의 가치이다. Δ_{OTM_t} 는 기초자산에 대한 포지션이고 이 값은 앞에서 설명한 유한 차분법을 이용하여 구한다. X_t 는 단기 무위험시장(money market account)에 투자 하는 양을 의미하며, t시점에서 C_{OTM_t} 와 P_t 의 값이 같게 되도록 X_t 가 결정된다. t+1시점에 헤지 포트폴리오의 가치는 식 (31)과 같이 구해진다.

$$P_{t+1} = \Delta_{OTM_t} S_{t+1} + X_t \exp(r_f \Delta t) \quad (\Delta t = 1/250) \quad (31)$$

이때 헤지 오차는 이 헤지 포트폴리오의 가격과 t+1시점에서 시장에서 관찰되는 외가격 옵션가격과의 차이로 정의된다.

$$\text{헤지 오차} = P_{t+1} - C_{OTM_{t+1}} \quad (32)$$

경우 2 : 등가격 옵션을 이용하여 델타 헤지

헤지 포트폴리오의 t시점 가치는 $P_t = w_{ATM_t} C_{ATM_t} + X_t$ 이다. 이 시점에서 $C_{OTM_t} = P_t$ 가 만족되도록 X_t 가 결정된다. 헤지 포트폴리오와 외가격 옵션의 델타 값이 같아야 하므로, 등가격 옵션에 대한 포지션인 w_{ATM_t} 는 식 (33)에 의해 결정된다.

$$\Delta_{OTM_t} = w_{ATM_t} \Delta_{ATM_t} \quad (33)$$

t+1시점에서 헤지 포트폴리오의 가치는 $P_{t+1} = w_{ATM_t} C_{ATM_{t+1}} + X_t \exp(r_f \Delta t)$ 와 같이 되고, 헤지 오차를 식 (32)에서처럼 구한다.

경우 3 : 기초자산과 등가격 옵션을 이용하여 델타 및 감마 헤지

t시점의 헤지 포트폴리오의 가치는 $P_t = w_{S_t} S_t + w_{ATM_t} C_{ATM_t} + X_t$ 가 된다. 헤지 포트폴리오의 델타와 감마 값이 각각 외가격 옵션의 델타와 감마 값과 같아야 하므로 기초자산의 포지션 w_{S_t} 와 등가격 옵션에 대한 포지션 w_{ATM_t} 는 식 (34)와 식 (35)에 의해 결정된다. 이때 Δ_{OTM_t} , Γ_{OTM_t} , Γ_{ATM_t} 는 앞에서 설명한 유한 차분법을 이용하여 구하게 된다.

$$\Delta_{OTM_t} = w_{S_t} + w_{ATM_t} \Delta_{ATM_t} \quad (34)$$

$$\Gamma_{OTM_t} = w_{ATM_t} \Gamma_{ATM_t} \quad (35)$$

이와 같이 w_{S_t} 과 w_{ATM_t} 이 결정되면, t+1시점에서 헤지 포트폴리오의 가치는 $P_{t+1} = w_{S_t} S_{t+1} + w_{ATM_t} C_{ATM_{t+1}} + X_t \exp(R_f \Delta t)$ 와 같이 된다. 헤지 오차는 위의 경우들과 마찬가지로 식 (32)를 이용하여 구할 수 있다.

<표 7>은 콜옵션과 풋옵션에 대하여 세 가지 헤지 방법에 따른 추계할인율의 1일, 2일 및 5일 헤지 성과를 나타낸다. 이때 헤지 성과를 헤지 오차의 절대 값의 평균과 표준편차로 판단한다.

<표 7>에서 보면 알 수 있듯이 추계할인율의 종류와 헤지 구간에 상관없이 등가격 옵션을 이용한 델타 헤지(경우 2)의 성과가 가장 우수한데, 이는 외가격 옵션이 기초자산 보다 등가격 옵션과의 관련성이 높기 때문으로 풀이된다. 즉 시장에 어떤 정보가 오거나, 상태에 대한 확률이 변하였을 때 외가격 옵션과 등가격 옵션의 움직임이 밀접하게 움직임을 뜻한다.

시간에 따라 변하는 추계할인율의 경우, Rosenberg and Engle(2002)의 결과와는 달리 다항식 추계할인율을 이용하여 헤지를 했을 때가 기초자산만을 이용하여 델타 헤지(경우 1)를 하는 경우를 제외하고는 콜옵션의 경우는 항상, 풋옵션의 경우는 채

〈표 7〉 콜옵션 및 풋옵션에 대한 헤지 성과 비교

본 표의 각 Panel은 추계할인율을 옵션 선택 자료만 가지고 추정할 경우와 채권가격을 정확히 결정하도록 제약을 주고 추정한 경우에 각각 외가격 콜(풋)옵션 100P만큼의 포지션에 대하여 아래의 세 가지 헤지 방법을 사용한 헤지 성과를 보여준다. (Case 1)은 기초자산에 델타 헤지를 한 경우, (Case 2)는 등가격 콜(풋)옵션을 이용하여 델타 헤지를 한 경우, (Case 3)은 기초자산과 등가격 콜(풋) 옵션을 이용하여 델타 및 감마 헤지를 한 경우를 나타낸다. 이와 같은 각각의 헤지 방법에 따라 헤지 포트폴리오를 구성하여 이 헤지 포트폴리오와 외가격 옵션가격을 비교하여 헤지 오차를 구하게 된다. [Part 1]은 콜옵션에 대한 결과 값이고, [Part 2]는 풋옵션에 대한 결과 값이다. 헤지 성과는 헤지 오차의 절대값에 대한 평균과 표준 편차로 측정한다. <Panel A>는 시변하는 맥합수 추계할인율의 경우, <Panel B>는 시변하는 다항식 추계할인율의 경우, <Panel C>는 시간불 변하는 맥합수 추계할인율의 경우, <Panel D>는 시간불 변하는 다항식 추계할인율의 경우이다.

[Part 1] 콜옵션

<Panel A> 시변하는 맥합수 추계할인율(time-varying power pricing kernel)

		채권 가격을 고려하지 않은 경우				채권 가격을 고려한 경우							
		1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지			
	평균 표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차		
Case 1	12.799	10.032	21.647	31.115	33.899	39.136	Case 1	15.001	15.202	29.374	36.529	44.320	46.706
Case 2	8.599	9.839	15.412	17.185	23.287	23.289	Case 2	8.779	9.865	15.653	17.051	23.823	23.729
Case 3	15.459	15.726	40.651	42.373	78.773	76.219	Case 3	10.773	10.228	38.205	39.567	79.625	76.686

<Panel B> 시변하는 다항식 추계할인율(time-varying orthogonal polynomial pricing kernel)

		채권 가격을 고려하지 않은 경우				채권 가격을 고려한 경우							
		1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지			
	평균 표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차		
Case 1	12.609	11.240	22.464	27.974	35.453	36.133	Case 1	12.664	11.313	22.480	29.075	35.654	36.831
Case 2	6.089	6.243	10.260	10.436	16.934	17.616	Case 2	5.952	5.982	10.207	10.287	16.939	17.604
Case 3	6.573	5.623	29.448	26.962	63.279	62.293	Case 3	6.654	5.932	29.314	26.504	63.784	62.269

<Panel C> 시불변하는 멱함수 추계할인율(time-invariant power pricing kernel)

		채권 가격을 고려하지 않은 경우					채권 가격을 고려한 경우						
		1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	평균 표준편차	1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	평균 표준편차	2일 후 헤지	5일 후 헤지		
평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차		
Case 1	14.507	13.443	27.002	32.511	43.774	45.718	Case 1	15.084	14.921	29.669	36.046	45.966	49.429
Case 2	8.996	9.635	15.811	17.023	24.373	24.286	Case 2	9.033	9.683	15.892	17.110	24.454	24.337
Case 3	11.705	11.502	38.055	41.321	80.030	81.590	Case 3	10.945	10.478	38.164	40.817	80.416	81.496

<Panel D> 시불변하는 다항식 추계할인율(time-invariant orthogonal polynomial pricing kernel)

		채권 가격을 고려하지 않은 경우					채권 가격을 고려한 경우						
		1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	평균 표준편차	1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	평균 표준편차	2일 후 헤지	5일 후 헤지		
평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차		
Case 1	17.919	18.104	35.754	42.919	53.727	60.460	Case 1	18.028	18.234	35.951	43.292	53.920	60.696
Case 2	8.682	8.821	13.417	14.749	23.512	24.029	Case 2	8.662	8.793	13.495	14.837	23.420	24.005
Case 3	14.448	12.546	33.875	32.227	65.215	65.273	Case 3	14.231	12.322	34.018	32.467	65.796	65.803

[Part 2] 풋옵션

<Panel A> 시불변하는 멱함수 추계할인율(time-varying power pricing kernel)

		채권 가격을 고려하지 않은 경우					채권 가격을 고려한 경우						
		1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	평균 표준편차	1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	평균 표준편차	2일 후 헤지	5일 후 헤지		
평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차		
Case 1	13.808	16.544	33.517	89.397	39.132	82.702	Case 1	12.224	12.733	31.243	87.530	36.842	80.834
Case 2	5.384	4.418	16.943	60.072	19.541	56.082	Case 2	5.275	4.456	16.690	59.691	19.198	55.607
Case 3	6.723	5.508	17.043	42.207	25.986	39.566	Case 3	5.521	4.640	16.191	41.657	25.015	39.054

<Panel B> 시변하는 다항식 추계할인율(time-varying orthogonal polynomial pricing kernel)

채권 가격을 고려하지 않은 경우			채권 가격을 고려한 경우			
1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	
평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	
Case 1	12.920	14.973	31.619	85.837	38.995	79.184
Case 2	5.989	6.351	18.133	58.903	20.371	55.577
Case 3	4.565	3.978	14.697	25.576	24.616	26.325
Case 1	12.925	14.952	31.715	85.916	38.974	79.212
Case 2	6.013	6.622	18.200	60.550	20.689	57.151
Case 3	4.683	4.155	15.358	29.337	25.303	29.531

<Panel C> 시불변하는 벡터함수 추계할인율(time-invariant power pricing kernel)

채권 가격을 고려하지 않은 경우			채권 가격을 고려한 경우			
1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	
평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	
Case 1	12.887	12.440	31.958	89.856	37.609	83.893
Case 2	5.607	4.329	16.886	60.104	20.126	55.987
Case 3	5.719	5.158	16.939	42.189	25.350	39.614
Case 1	12.535	11.947	30.798	88.126	37.406	81.984
Case 2	5.624	4.329	16.982	60.434	20.124	56.332
Case 3	5.588	4.793	16.868	42.670	24.999	40.105

<Panel D> 시불변하는 다항식 추계할인율(time-invariant orthogonal polynomial pricing kernel)

채권 가격을 고려하지 않은 경우			채권 가격을 고려한 경우			
1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	1일 후 헤지	2일 후 헤지	5일 후 헤지	
평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	평균 표준편차	
Case 1	13.428	12.783	27.864	76.789	43.155	69.819
Case 2	5.786	5.021	18.606	65.161	20.518	61.152
Case 3	7.740	6.913	19.799	44.084	27.204	41.709
Case 1	13.417	12.773	27.855	76.781	43.092	69.803
Case 2	5.768	4.933	18.458	64.833	20.456	60.813
Case 3	7.563	6.779	19.658	43.809	27.224	41.439

권의 가격을 고려하지 않은 경우의 헤지 성과가 멱함수를 이용하는 경우보다 대체로 더 좋다. 이는 좀 더 복잡하고 유연한 형태의 추계할인율인 다항식 추계할인율을 사용하면 시장에 존재하는 옵션가격을 잘 반영하여 가격결정뿐 아니라 헤지도 좀 더 정확하게 할 수 있음을 의미한다. 이와 같은 결과를 추계할인율의 기초자산 수익률 상태에 따른 변화와 관련하여 생각해 볼 수 있다. 콜옵션이나 풋옵션이나 시변하는 추계할인율에 따른 헤지 성과차이에 대해서는 비슷한 함의를 제시하나, 풋옵션의 경우 헤지구간의 길이나 늘어날수록 헤지 오차의 표준편차가 콜옵션에 비해 크게 늘어남을 알 수 있다. 이는 풋옵션의 경우 미래 상태에 대한 나쁜 정보(bad information)에 대해 콜옵션보다 훨씬 더 민감하므로 헤지 오차의 변화가 크다고 생각해 볼 수 있다.

시간에 따라 변하는 추계할인율과 시간에 따라 변하지 않는 평균적인 추계할인율의 헤지 성과를 비교해 보면, 대체로 시간에 따라 변하는 추계할인율을 이용하여 헤지를 했을 때 성과가 좋다. 단, 멱함수 추계할인율의 경우 기초자산과 등가격 콜옵션을 이용하여 델타 및 감마 헤지를 했을 경우에는 오히려 시간불변 하는 추계할인율을 사용하여 헤지를 할 때가 성과가 더 뛰어나다. 이러한 결과는 상대적으로 복잡한 헤지 방법을 사용할 때는 단순하고 평균적인 추계할인율을 사용할 때 헤지 성과가 더 좋을 수도 있음을 의미한다.

채권가격을 정확히 가격결정 하도록 제약을 주고 추정된 추계할인율을 이용하여 헤지를 하면 대체로 헤지 성과가 나빠진다. 그러나 다항식 추계할인율의 경우 옵션 가격 만을 가지고 추계할인율을 추정하여 헤지를 한 경우와 비교해 성과의 차이가 근소함을 알 수 있다. 또한 멱함수 추계할인율의 경우, 델타 및 감마 헤지(경우 3) 성과는 오히려 좋아진다.

정리하면, 추계할인율들간의 헤지 성과에 대한 차이가 분명히 존재하지만 가격결정력이나 예측력 차이에 비해 그 정도가 작다. 이는 가격결정력과 달리 반드시 유연하거나 시간에 따라 값이 크게 바뀌는 추계할인율 모형이 헤지를 잘하는 것이 아니라 단순하거나 평균적인 개념의 추계할인율도 헤지 성과가 크게 떨어지지 않는다는 것을 보여준다. 이는 경우에 따라 복잡한 추계변동성 모형이나 추계이자율 혹은 점프 변동성 모형보다 단순하고 평균적인 시간불변의 변동성을 가정하는 블랙-숄즈 모형이 헤지 성과가 더 좋을 수 있다는 실증 연구결과들과도 관련 지어 생각해 볼 수 있다.

VI. 위험회피도와 경기변동

본 장에서는 실증적 추계할인율로부터 유도된 위험회피도 지수, 즉 실증적 위험회피지수가 경기변동과 어떤 관계가 있는지를 살펴보기 위해, 실증적 위험회피지수와 경기변동을 잡아내는 경제변수들과의 관계를 살펴본다. 비록 다항식 추계할인율의 실증 성과가 멱함수 추계할인율보다 좋다 하더라도, 멱함수 추계할인율은 그 함수형태가 이론적 배경을 가지고 모형화 되었고, 특히 멱함수 추계할인율의 두 번째 모수인 $\theta_{1,t}$ 가 Pratt-Arrow의 상대적 위험회피도를 의미하도록 모형화 되었기 때문에 멱함수 추계할인율로부터 유도된 위험회피도¹⁰⁾를 본 장에서의 분석을 위한 실증적 위험회피도로 사용한다.

Fama and French(1989)와 Lahiri and Wang(1996)은 위험 채권의 수익률과 무위험 채권의 수익률의 차이인 신용 스프레드의 변동이 경기변동과 관계가 있음을 주장하였다. 경제가 호황 일 때는 스프레드가 좁아지고, 경제가 불황일 때는 신용스프레드가 넓어진다.

Estrella and Hardouvelis(1991)는 장기채권의 수익률과 단기 채권의 수익률의 차이인 기간 스프레드와 단기 이자율이 경기변동과 밀접한 관련이 있음을 보였다. 이들은 경기변동과 채권의 수익률 곡선의 기울기 사이에 밀접한 관련이 있고, 단기 이자율은 통화 정책과 관련이 있기 때문에 위의 변수들이 경기변동과 관련이 있다고 주장하였다.

이러한 변수들 이외에 경기변동과 관계가 있다고 판단되는 KOSPI 200 주가지수의 수익률과, 기초자산의 미래에 대한 변동성에 해당하는 내재변동성과 기초자산의 객관적 변동성(objective volatility)의 차이인 변동성 스프레드, 그리고 경기 선행지수(CI)가 경기변동에 대한 대리변수(proxy variable)로서 분석에 사용된다. 또한 위험회피도의 자기상관(autocorrelation)을 잡아내기 위하여 위험회피도의 1기 래그 값을 독립 변수로 사용한다.

신용 스프레드는 5년 만기 BBB등급의 회사채금리와 5년 만기 국채금리의 차이를 이용하여 구한다. 기간 스프레드는 5년 금리와 3개월 금리의 차이를 계산하고, 단기 이자율은 3개월 금리를 이용해 구한다. 변동성 스프레드를 계산할 때, 내재변동성은

10) 다항식 추계할인율로부터는 이 같은 상대적 위험회피도를 유도할 수 없다.

등가격 옵션가격으로부터 구하고, 객관적 변동성은 현재시점으로부터 한달 전까지의 일별 자료를 이용하여 역사적 변동성을 계산하여 사용한다.

<표 8> 위험회피도와 경기변동 간의 관계

<Panel A>는 채권가격을 고려하지 않은 멱함수 추계할인율의 추정치로부터 위험회피도를 구하여 회귀분석을 한 것이고, <Panel B>는 채권가격을 정확히 가격결정하는 멱함수 추계할인율의 추정치로부터 위험회피도를 구하여 회귀분석을 한 것이다. 회귀분석에 사용된 변수는 차례대로 절편값, 위험회피도의 1기 래그값, 기초자산의 로그 수익률, 신용 스프레드, 기간 스프레드, 단기 이자율, 변동성 스프레드, 경기 선행 지수이다. 이분산성 문제를 해결하기 위하여 Newey-West(1987)의 이분산 일치추정량을 사용한다. 첫째 열은 다중 회귀분석을 통해 추정된 각 변수의 계수를, 둘째 열은 표준 오차를, 셋째 열은 T-통계량 값을, 넷째 열은 유의확률 값을 의미한다.

<Panel A> 채권가격을 고려하지 않은 경우

	추정치	표준오차	T-통계량	유의확률
절편항	1.007	0.19	5.293	0
1기래그 위험회피도	0.371	0.071	5.22	0
지수수익률	0.027	0.015	1.854	0.069
신용 스프레드	-0.044	0.027	-1.605	0.114
기간 스프레드	-0.002	0.001	-1.531	0.131
단기 이자율	0.016	0.024	0.648	0.52
변동성 스프레드	6.04E-05	0	0.695	0.49
경기 선행지수	-0.173	0.19	-0.912	0.366
R-squared	0.238	Adjusted R-squared		0.146

<Panel B> 채권가격을 고려한 경우

	추정치	표준오차	T-통계량	유의확률
절편항	1.042	0.222	4.702	0
1기래그 위험회피도	0.314	0.1	3.145	0.003
지수수익률	0.035	0.016	2.155	0.035
신용 스프레드	-0.031	0.026	-1.193	0.238
기간 스프레드	-0.001	0.001	-1.293	0.201
단기 이자율	0.031	0.021	1.469	0.147
변동성 스프레드	2.45E-05	0	0.402	0.689
경기 선행지수	-0.219	0.203	-1.078	0.285
R-squared	0.23	Adjusted R-squared		0.137

이렇게 구한 변수들을 가지고, 아래의 식 (36)의 회귀분석을 통하여 위험회피도

와 경기변동에 대한 변수들이 어떤 관계가 있는지 살펴본다. 주가지수 수익률을 제외한 모든 경기변동에 대한 변수들은 백분율 변화값을 사용한다. 즉, 식 (36)에서 $\Delta Credit_t = 100(Credit_t - Credit_{t-1})/Credit_{t-1}$ 와 같이 되고 r_t 는 KOSPI 200 지수의 수익률을 의미한다.

$$\begin{aligned} \theta_{1,t} = & \alpha + \beta_1\theta_{1,t-1} + \beta_2r_t + \beta_3\Delta Credit_t + \beta_4\Delta Term_t \\ & + \beta_5\Delta Short_t + \beta_6\Delta Vol_t + \beta_7\Delta CI_t + \epsilon_t \end{aligned} \quad (36)$$

<표 8>은 위 식에 대한 회귀분석 결과를 나타낸다. 회귀분석을 할 때, 이분산성 문제를 해결하기 위해 Newey-West(1987)의 이분산일치 추정량을 이용하였다. <표 8>의 Panel A는 채권가격을 고려하지 않고 추정된 멱함수 추계할인율로부터 구한 위험회피도에 대하여 분석한 것이고, Panel B는 채권가격을 정확하게 가격결정하는 추계할인율로부터 구한 위험회피도에 대하여 분석한 것이다. 두 경우가 변수들의 계수의 부호와 유의성에 판단에 대하여 동일한 결과¹¹⁾를 제시한다. 회귀분석결과를 위험회피도의 1기 래그 값과, 경기변동을 나타내는 변수들 중에서는 오직 기초자산의 수익률이 현재의 위험회피도와 유의한 선형 관계가 있음을 보여준다.

VII. 결 론

본 연구에서는 Rosenberg and Engle(2002)이 제시한 추계할인율 모형을 이용하여 역 공학기법을 통해 KOSPI 200 옵션시장이 의미하는 실증적 추계할인율 추정하고, 이 실증적 추계할인율의 가격결정력, 예측력 및 헤지 성과를 비교하였다.

본 논문의 결과는 다음과 같이 요약될 수 있다. 첫째, S&P 500 옵션 자료를 이용한 Rosenberg and Engle(2002)의 결과와는 달리 멱함수 형태의 추계할인율에 비해 보다 복잡하나 일반적인 형태인 다항식 형태의 추계할인율을 사용했을 때 헤지 성과가 대체로 우수했다. 또한, 가격결정력과 예측력은 다항식 추계할인율과 멱함수

11) 단, 주가지수 수익률에 대한 계수의 경우 유의확률을 몇 %수준으로 잡느냐에 따라 통계적 유의성에 대한 판단이 달라 질 수 있다.

추계할인율간의 성과차이의 정도가 더 컸다. 즉, 멱함수 추계할인율은 상대적 위험 회피도를 유도할 수 있도록 경제이론적을 고려하여 모형화 되었으나 실증분석력은 자료 자체를 잘 설명하도록 만들어진 다항식 추계할인율이 더 우월함을 의미한다.

둘째, 옵션가격과 보수를 고려하는 것 이외에 단기 채권가격을 정확히 가격결정 하도록 제약하는 경우 실증적 추계할인율의 가격결정력과 예측력이 상대적으로 저하되었다. 단, 멱함수 추계할인율의 경우 저하된 정도가 큰 반면, 다항식 추계할인율의 경우 옵션가격만을 이용하여 추정한 경우와 그 차이가 크지 않다. 헤지 성과의 경우, 채권가격을 고려하고 실증적 추계할인율을 추정하여도 헤지 성과가 크게 달라지지 않았으며 헤지 방법에 따라 오히려 더 헤지 성과가 좋아지는 경우도 발견되었다.

셋째, 시간에 따라 변하지 않는 추계할인율을 사용하면, 가격결정력과 예측력은 크게 나빠지며, 다항식 형태의 실증적 추계할인율의 경우에서 이 차이가 더 두드러진다. 헤지 성과 또한 시간에 따라 변하는 실증적 추계할인율을 이용했을 때보다 상대적으로 열등해진다. 단, 멱함수 형태의 실증적 추계할인율의 경우, 특정 헤지 방법을 사용했을 때는 오히려 시간에 따라 변하지 않는 평균적인 개념의 추계할인율의 헤지 성과가 더 좋았다.

넷째, 다항식 추계할인율은 기초자산의 수익률 변화에 따른 변동의 폭이 멱함수 추계할인율 보다 크며, 시간이 지남에 따라 기초자산의 수익률과의 관계 또한 큰 폭으로 변화한다. 본 논문에서 사용된 추계할인율 모형에서 일종의 유일한 상태변수라고 할 수 있는 기초자산의 수익률 변동에 민감한 성격 때문에, 다항식 추계할인율의 실증성과가 우월하다고 판단된다. 한편, 멱함수 추계할인율은 기초자산의 수익률이 증가함에 따라 대체로 감소하는 경향을 보이는데 이는 투자자들의 한계효용이 감소함을 의미한다.

다섯째, 실증적 추계할인율로부터 유도된 위험회피도는 시간이 지남에 따라 변하였으며, 경제상황을 잡아내는 변수들 중 오직 기초자산의 수익률과 위험회피도의 래그 값만이 통계적으로 유의한 관계를 보였다.

위의 결과들은 KOSPI 200 옵션시장에서는 실증적 추계할인율이 주가수익률의 선형에 가까운 형태로 추정되는 멱함수 실증할인율보다는 비선형의 형태를 보다 잘 포착하는 다항식 추계할인율이 더 현실을 잘 설명한다는 것을 보여준다. 본 연구는 Rosenberg and Engle(2002)의 방법론을 따라서 연구된 것이므로 방법론적으로 새

로운 것은 없다. 그러나, KOSPI 200 옵션 시장이 의미하는 모수적 추계할인율에 대한 다양한 분석은 본 연구에서 처음 시도되는 것이며, 추계할인율은 모든 자산가격 결정모형의 기본이 되는 것으로 본 논문의 실증결과가 한국시장에 적합한 가격결정모형을 찾으려는 이후의 연구에 초석이 될 수 있을 것으로 기대한다. 미래에는 보다 다양한 형태의 추계할인율을 고려하여 보다 더 정확한 실증적 추계할인율을 찾아내려고 시도할 필요가 있을 것이며, 이와 같은 실증적 추계할인율의 경제적 의미와 자산가격결정모형에서의 의미를 찾아 보는 것이 추후 연구 과제가 될 것이다.

참고문헌

- 김 솔, “위험중립분포 왜도, 침도의 옵션가격결정에 대한 영향력”, *선물연구*, 제14권 제2호(2006), pp. 31-56.
- 김 솔, “위험중립분포 왜도, 침도의 상대적 중요성 : Corrado and Su(1996) 모형을 이용한 옵션 가격 예측”, *선물연구*, 제16권 제1호(2008), pp. 1-20.
- 변석준, 윤선중, 강병진, “KOSPI 200 지수 옵션 시장의 변동성 스프레드와 위험회피도” *재무연구*, 제20권 제3호(2007), pp. 97-126.
- 정혜욱, 안병국, “우리나라 시장에서의 옵션 가격결정 모형의 성과 비교 : KOSPI 200 지수 콜 옵션을 중심으로”, *POSRI 경영연구*, 제2권 제2호(2002), pp. 225-254.
- 한상일, 윤창현, “The estimate of pricing kernel of KOSPI 200 options under stochastic volatility”, *선물연구*, 제15권 제1호(2007), pp. 135-165.
- Ait-Sahalia, Y. and Lo, A., “Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial prices”, *Journal of Finance*, Vol. 53, No. 2(1998), pp. 499-548.
- Ait-Sahalia, Y. and Lo, A. W., “Nonparametric risk management and implied risk aversion”, *Journal of Econometrics*, Vol. 94, Nos. 1-2(2000), pp. 9-51.
- Ahn, H., Kang, J., and Ryu, D., “Informed trading in the index option market : the case of KOSPI 200 options”, *Journal of futures market*, Vol. 28, No. 12(2008), 1-29.
- Arrow, K. J., “The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing”, *Review of Economic Studies*, Vol. 31, No. 2(1964), pp. 91-96.
- Bakshi, G., Cao, C. and Chen, Z., “Empirical performance of alternative option pricing models”, *The Journal of Finance*, Vol. 52, No. 5(1997), pp. 2003-2049.
- Bates, D., “Post-1987 crash fears in S&P 500 futures options”, *Journal of Econometrics*, Vol. 94, Nos. 1-2(2000), pp. 181-238.
- Bliss, Robert and Nikolaos, Panigirtzoglou, “Option-implied risk aversion estimates”, *Journal of Finance*, Vol. 59, No. 1(2004), pp. 407-446.

- Bollerslev, T., "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3(1986), pp. 307-327.
- Bollerslev, T. and Wooldridge, J., "Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances", *Econometric Reviews*, Vol. 11, No. 2(1992), pp. 143-172.
- Bondarenko, O., "Why are Put Options So Expensive?", Working Paper (2003).
- Broadie, M., Chernov, M., and Johannes, M., "Model Specification and Risk Premia : Evidence from futures options", *Journal of Finance*, Vol. 62, No. 3 (2007), pp. 1453-1490.
- Brown, D. P. and Gibbons, M. R., "A simple econometric approach for utility-based asset pricing models", *Journal of Finance*, Vol. 40, No. 2(1985), pp. 359-381.
- Campbell, J. and Cochrane, J., "By force of habit : a consumption-based explanation of aggregate stock market behavior", *Journal of Political Economy*, Vol. 107, No. 2(1999), pp. 205-251.
- Campbell, J., Lo, A., and MacKinlay, C., *The econometrics of financial markets*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- Chapman, D., "Approximating the asset pricing kernel", *Journal of Finance*, Vol. 52, No. 4(1997), pp. 1383-1410.
- Chernov, M., "Empirical reverse engineering of the pricing kernel", *Journal of Econometrics*, Vol. 116, Nos. 1-2(2003), pp. 329-364.
- Cochrane, J. H., *Asset pricing*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- Duan, J. C., "Augmented GARCH(p, q) process and its diffusion limit", *Journal of Econometrics*, Vol. 79, No. 1(1997), pp. 97-127.
- Engle, R. F., "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation", *Econometrica*, Vol. 50, No. 4(1982), pp. 987-1007.
- Ermini, L., "Some new evidence on the timing of consumption decisions and their generating process", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 71, No. 4(1989), pp. 643-650.

- Estrella, A. and Hardouvelis, G. A., “The term structure as a predictor of real economic activity”, *Journal of Finance*, Vol. 46, No. 2(1991), pp. 555-576.
- Fama, E. F. and French, K. R., “Business conditions and expected returns on stocks and bonds”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 25, No. 1(1989), pp. 23-49.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., and Runkle, D. E., “On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks”, *Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5(1993), pp. 1779-1801.
- Hansen, L. P. and Richard, S., “The role of conditioning information in deducing testable restrictions implied by asset pricing models”, *Econometrica*, Vol. 55, No. 3(1987), pp. 587-613.
- Hansen, L. P. and Jagannathan, R., “Implications of security market data for models of dynamic economies”, *Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 2(1991), pp. 225-262.
- Hansen, L. P. and Singleton, K. J., “Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models”, *Econometrica*, Vol. 50, No. 5 (1982), pp. 1269-1286.
- Hansen, L. P. and Singleton, K. J., “Stochastic consumption, risk aversion, and the temporal behavior of asset returns”, *Journal of Political Economy*, Vol. 91, No. 2(1983), pp. 249-265.
- Harrison, J. M. and Kreps, D. M., “Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, No. 3(1979), pp. 381-408.
- Heston, S. L., “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options”, *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2(1993), pp. 327-343.
- Isaenko, S., “Dynamic Equilibrium with Overpriced Put Options”, *Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA*, Vol. 36, No. 1(2007), pp. 1-26.
- Jackwerth, J., “Recovering risk aversion from option prices and realized returns”,

- Review of Financial Studies*, Vol. 13, No. 2(2000), pp. 433-451.
- Jackwerth, J. and Rubinstein, M., "Recovering probability distributions from option prices", *Journal of Finance*, Vol. 51, No. 5(1996), pp. 1611-1632.
- Lahiri, K. and Wang, J. G., Interest rate spreads as predictors of business cycles. In : Maddala, G. S., Rao, C. R. (Eds.), *Handbook of Statistics*, Elsevier Science, New York, (1996) pp. 297-315.
- Lucas, R., "Asset prices in an exchange economy", *Econometrica*, Vol. 46, No. 6(1978), pp. 1429-1445.
- Newey, W. and West, K., "A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix", *Econometrica*, Vol. 55, No. 3(1987), pp. 703-708.
- Pan, J., "The jump-risk premia implicit in options : evidence from an integrated time-series study", *Journal of Financial Economics*, Vol. 63, No. 1(2002), pp. 3-50.
- Pratt, J. W., "Risk aversion in the small and in the large", *Econometrica*, Vol. 32, Vol. 1-2(1964), pp. 122-136.
- Rosenberg, J. and Engle, R., "Empirical pricing kernels", *Journal of Financial Economics*, Vol. 64, No. 3(2002), pp. 341-372.
- Ross, S. A., "A simple approach to the valuation of risky streams", *Journal of Business*, Vol. 51, No. 3(1978), pp. 453-475.
- Rubinstein, M., "The strong case for the generalized logarithmic utility model as the premier model of financial markets", *Journal of Finance*, Vol. 31, No. 2(1976), pp. 551-571.
- Slesnick, D. T., "Are our data relevant to the theory? The case of aggregate consumption", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 16, No. 1(1998), pp. 52-61.
- Wilcox, D., "The construction of U.S. consumption data : some facts and their implications for empirical work", *American Economic Review*, Vol. 82, No. 4(1992), pp. 922-941.

〈Appendix A〉

Duan(1997)은 아래와 같은 확장(augmented) GARCH(1, 1) 모형을 소개하였다.

$$\text{평균 방정식 : } X_t = \mu_t + \sqrt{h_t} \epsilon_t \quad \text{단, } \epsilon_t | I_{t-1} \sim f(0, 1) \tag{A1}$$

$$\text{분산 방정식 : } \phi_t = \alpha_0 + \phi_{t-1} \xi_{1,t-1} + \xi_{2,t-1} \tag{A2}$$

$$\text{단, } h_t = \begin{cases} |\lambda \phi_t - \lambda + 1|^{1/\lambda}, & \text{if } \lambda \neq 0 \\ \exp(\phi_t - 1), & \text{if } \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\xi_{1,t} = \alpha_1 + \alpha_2 |\epsilon_t - c|^\delta + \alpha_3 \max(0, -(\epsilon_t - c))^\delta$$

$$\xi_{2,t} = \alpha_4 f(|\epsilon_t - c|; \delta) + \alpha_5 f(\max(0, -(\epsilon_t - c)); \delta)$$

이때 $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0$ 이라면, 장기 변동성(long-run variance)이 존재하기 위한 안정성 조건은 아래의 식 (A3)와 식 (A4)와 같다.

$$\alpha_1 + \alpha_2 E[|\epsilon_t - c|^\delta] + \alpha_3 E[\max(0, -(\epsilon_t - c))^\delta] \leq 1 \quad \text{if } \alpha_2 > 0 \text{ or } \alpha_3 \neq 0 \tag{A3}$$

$$\alpha_1 < 1 \quad \text{if } \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \tag{A4}$$

본 논문에서 사용된 비대칭 GARH(1, 1)는 Duan(1997)의 확장 GARCH(1, 1) 모형에서 $\lambda = 1, c = 0, \delta = 2, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0$ 인 경우에 해당하므로 본문에서 사용된 비대칭 GARCH(1, 1)의 분산방정식은 식 (A2)로부터 식 (A5)와 같이 유도된다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1} \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_3 h_{t-1} \max(0, -\epsilon_{t-1})^2 \tag{A5}$$

여기서는 본문과는 달리 오차항의 조건부 분포가 평균이 0이고 분산이 1인 표준화된 분포를 따르므로 분산 방정식의 식이 다른 형태로 보이나 두 경우(식 (14)와 식 (A5))는 본질적으로 같다. 만약 오차항의 확률분포 f 가 대칭적(symmetric)인 분포를 가질 경우, 식 (A3)에 의하여 비대칭 GARCH(1, 1)의 안정성 조건은 식 (A6)

과 같이 표현할 수 있다.

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 / 2 \leq 1 \quad (\text{A6})$$

이때 장기변동성이 존재하기 위해서는 식 (A6)의 마지막 조건이 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 / 2 < 1$ 와 같이 되어야 하고 이는 본문 제 II장 제 4절의 식 (15)에 해당한다.

THE KOREAN JOURNAL OF FINANCE

Volume 21 Number 3

November 2008

A Study on Empirical Pricing Kernels : A Case of the KOSPI 200 options

Jangkoo Kang* · Byung Chun Kim** · Doojin Ryu***
Jaesun Yun****

Received 24 Jul. 2008, Accepted 3 Nov. 2008

Revised (1st) 22 Oct. 2008, (2nd) 3 Nov. 2008

Abstract

This paper estimates the empirical pricing kernels (EPK) implied by the KOSPI 200 options using the reverse engineering technique suggested by Rosenberg and Engle (2002). The empirical pricing kernels are estimated as a power function as well as a polynomial function of the returns of the underlying index.

The empirical results documented in this paper are as follows :

First, the empirical performance of the power pricing kernel is worse than that of the polynomial pricing kernel that contains more parameters and so is more flexible than the power pricing kernel. This contrasts to the results of Rosenberg and Engle (2002), which investigate the S&P 500 options market.

Second, the pricing and forecasting ability of the EPK deteriorate if we estimate the EPK by imposing the restriction that the EPK prices the short term bond exactly. While the amount of the deterioration is large in the case of the power pricing kernel, it is relatively small in the case of the polynomial pricing kernel. The hedging performance with the restriction is almost the same as or sometimes better than the one without the restriction, depending on the hedging method.

Third, the empirical performance of time-invariant EPKs is generally poor. The difference in the empirical performance between the time-invariant EPK and the time varying EPK is more prominent in the case of polynomial EPK. The hedging performance of time-invariant EPKs is sometimes better than that of the time-varying EPKs in the case of power EPK.

Fourth, the polynomial EPK is more sensitive to the underlying return state compared to the power EPK. The shape of the polynomial EPK that is a function of the underlying return state fluctuates more and reflects the non-linearity of the pricing kernel better than the power EPK. The estimated power EPKs tend to decrease as the underlying return increase. This implies the marginal utilities of investors decrease with the underlying return.

Fifth, the risk aversion implied by the EPK is time varying and it has a statistically significant relation with the KOSPI 200 index return and the lag value of the risk aversion.

Keywords : Empirical Pricing Kernel, Hedging Performance, Risk Aversion,
KOSPI 200 Options, Reverse Engineering

* KAIST

** KAIST

*** Corresponding Author, KAIST Business School, 207-43, Cheongyangni 2-dong, Dongdaemun-ku, Seoul, 130-722, Korea, E-mail : sharpjin@business.kaist.ac.kr

**** Samsung Investments