

비선형 PSE를 이용한 압축성 경계층의 안정성 해석

B. Gao,¹ 박 승 오^{*2}STABILITY ANALYSIS OF COMPRESSIBLE BOUNDARY LAYER
IN CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM USING NONLINEAR PSEB. Gao¹ and S.O. Park^{*2}

Nonlinear parabolized stability equations for compressible flow in general curvilinear coordinate system are derived to deal with a broad range of transition prediction problems on complex geometry. A highly accurate finite difference PSE code has been developed using an implicit marching procedure. Blasius flow is tested. The results of the present computation show good agreement with DNS data. Nonlinear interaction can make the T-S fundamental wave more unstable and the onset of its amplitude decay is shifted downstream relative to linear case. For nonlinear calculations, rather small difference in initial amplitude can produce large change during nonlinear region. Compressible secondary instability at Mach number 1.6 is also simulated and showed that 1.1% initial amplitude for primary mode is enough to trigger the secondary growth.

Key Words : nonlinear PSE (Nonlinear Parabolized Stability Equation), secondary growth, T-S wave, Blasius flow, curvilinear coordinate, compressible boundary layer, stability

1. 서 론

압축성 경계층 안정성에 관한 연구는 고속 유동의 천이 발생에 대한 이해와 laminar flow control(LFC) 기술에 이론적 바탕을 제공한다는 중요성 때문에 최근 주목을 받고 있다. 이 분야의 연구는 대부분 경계층의 성장과 비선형 상호작용을 무시하는 선형 안정성 이론(LST)[1]을 통해 이루어져 왔다. 선형 안정성 이론은 평행류 가정(parallel flow assumption)을 적용하고 지배방정식을 선형화하기 때문에 정확도 면에서 그 실용성이 제한된다. Saric[2]은 경계층의 비평행성(non-parallelism)에 의해 중립 안정성 곡선의 형태가 영향을 받게 됨을 보여주었다. 또한 Bertolotti[3]는 비평행성을 고려한 경우의 3차원 교란에 대한 안정성 해석 결과가 평행성을 고려한 경우의 결과와 명확한 차이를 보임을 보여주었다. 한편으로는 속도의 교란이 평균 유동 속도 크기의 1% 수준으로 커지게 되면 선형화의 가정이 더 이상 타당성을 가지지 않음

므로 비선형 효과가 고려되어야 한다. 천이 지점을 예측하기 위한 또 다른 방법으로는 전체 Navier-Stokes 방정식을 계산하는 Direct Numerical Simulation(DNS)가 있다. 하지만 이 방법은 매우 큰 컴퓨터 자원을 요구하므로 평판과 같은 매우 단순한 형상에 대해서만 연구되어 왔다[4]. 따라서 다양한 실제 비행체의 형상에 대한 천이 연구를 위해서는 DNS는 실용성이 떨어져 적절하지 않음이 받아들여지고 있다. Herbert가 Parabolized Stability Equation(PSE)[5]를 처음 소개한 이후, PSE는 적은 컴퓨터 자원만으로 비평행성과 비선형성을 포함한 안정성 해석이 가능하다는 점 때문에 널리 알려지게 되었다. 하지만 지금까지 대부분의 PSE를 이용한 연구들은 평판, 무한 또는 유한 익형과 같이 단순한 형상 위 경계층 안정성에 대해서만 수행되어왔다. 보다 복잡한 형상에 대해서는 비평행성과 비선형성을 무시하거나 주로 평균유동의 곡면 효과 등에만 부분적으로 이 특성을 고려하였다. 이전의 연구들에서는 곡면 효과 향을 단계별로 포함시키면서 결과에 미치는 영향을 고찰하는 방식으로 이루어져 왔다. 본 연구에서는 곡면효과를 나타내는 항들을 처음 지배방정식에서부터 완전하게 포함하여 연구를 수행하였다. 압축성 유동에 대한 비선형 안정

1 한국과학기술원 항공우주공학전공 박사과정

2 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학전공

* Corresponding author, E-mail: sopark@kaist.ac.kr

성 해석 연구는 그 복잡성 때문에 드물게 이루어져 왔다. 안정성 지배방정식에서는 157개에 달하는 비선형 항이 존재한다. 각 항의 유동 변수를 미소교란 이론에 따라 평균유동과 교란으로 분해하고, Bertolotti[3]가 비압축성 유동에 대해 수행한 바와 같이, 같은 주파수를 가지는 항들을 모아 비선형 미분방정식계 구성하는 것은 매우 복잡한 과정이 된다. Gao[6] 등은 PSE를 복잡한 형상에 적용할 때 적은 marching step이 요구될 때 발생하는 문제점들을 논한바 있다.

본 연구의 목표는 surface roughness나 타원형 원뿔 또는 받음각을 가지는 blunt 원뿔 등의 복잡한 형상 위 2차원 또는 3차원 경계층의 안정성을 비평행 효과, 비선형 효과 그리고 곡면 효과를 포함하여 해석할 수 있는 정확하고 효율적인 코드를 개발하는 것이다.

2. Nonlinear PSE

Generalized curvilinear 좌표계에서 압축성 선형 PSE는 참고 문헌[7]에 자세히 제시되어 있다. 직교 격자계에서의 비선형 항에 해당하는 부분은 부록 A에 주어져 있다. 이들을 통해 curvilinear 좌표계에서 비선형 교란 방정식은 다음 식 (1)과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \bar{B} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \bar{C} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \bar{D} \phi \\ & = \bar{V}_{\xi\xi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \bar{V}_{\eta\eta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \bar{V}_{\zeta\zeta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} \\ & + \bar{V}_{\eta\zeta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \zeta} + \bar{V}_{\xi\zeta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \zeta} + \bar{V}_{\xi\eta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{F} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $\phi = (\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T})^T$ 이고 $\bar{\Gamma}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{V}_{\xi\xi}, \bar{V}_{\eta\eta}, \bar{V}_{\zeta\zeta}, \bar{V}_{\eta\zeta}, \bar{V}_{\xi\zeta}, \bar{V}_{\xi\eta}$ 들은 평균 유동의 변수들로 구성되어 있으며 ξ, η, ζ 는 각각 streamwise, normal 그리고 spanwise 방향을 나타내는 좌표이다. 교란은 빠른 진동을 나타내는 파동과 천천히 변화하는 shape function으로 분해하여 표현 가능하다. 교란이 시간과 spanwise 방향에 대해서 주기성을 가지는 것으로 가정하면 전체 교란 ϕ 는 다음의 식 (2)와 같은 Fourier series로 표현 된다.

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{mn}(\xi, \eta) \times \\ & \exp \left[i \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \alpha_{mn}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} + n\beta\zeta - m\omega t \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 ω 와 β 는 각각 가장 긴 주기와 파장이 $2\pi/\omega, 2\pi/\beta$

가 되도록 선택한 교란의 주파수와 spanwise 방향의 파수를 나타낸다. α_{mn} 와 ψ_{mn} 은 Fourier mode $(m\omega, n\beta)$ 에 해당하는 streamwise 방향의 파수와 shape function의 Fourier component를 의미한다.

식 (2)의 표현을 모든 비선형 항에 대입하는 것은 실용적이지 못하다. 유도 과정을 보다 간단하게 하기 위해서 모든 비선형 항을 하나의 물리량으로 간주하고 이것에 Fourier 변환을 적용한다. 비선형 항들에 대한 Fourier 전개는 다음과 같은 형태로 취한다.

$$\bar{F} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{mn}(\xi, \eta) \exp[i(n\beta\zeta - m\omega t)] \quad (3)$$

식 (2)와 (3)의 표현을 식 (1)의 full disturbance 방정식에 적용하고 2차 order의 항을 무시하면 다음과 같은 표현을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\bar{D}_{mn} \psi_{mn} + \bar{A}_{mn} \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + \bar{B}_{mn} \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial \eta} - \bar{V}_{\eta\eta} \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial \eta^2} \right) \\ & \exp \left[i \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \alpha_{mn}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} + n\beta\zeta - m\omega t \right) \right] \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{mn} \exp[i(n\beta\zeta - m\omega t)] \end{aligned} \quad (4)$$

위의 식 (4)의 양변에 $\exp[i(-l\beta\zeta)] \exp[i(k\omega t)]$ 를 곱하고 시간에 대해서 구간 $[-\pi/\omega, \pi/\omega]$, 공간에 대해서 구간 $[-\pi/\beta, \pi/\beta]$ 적분을 수행하면, 삼각함수의 orthogonality에 의하여 Fourier 모드 $(m\omega, n\beta)$ 에 대한 다음의 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} & \bar{D}_{mn} \psi_{mn} + \bar{A}_{mn} \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial \xi} + \bar{B}_{mn} \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial \eta} - \bar{V}_{\eta\eta} \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial \eta^2} \\ & = F_{mn} / \exp \left[i \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \alpha_{mn}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \right) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{D}_{mn} = & -im\omega \bar{\Gamma} + \bar{D} + i\alpha \bar{A} + i n \beta \bar{C} \\ & - \left(i \frac{d\alpha_{mn}}{d\xi} - \alpha_{mn}^2 \right) \bar{V}_{\xi\xi} + n\alpha_{mn}\beta \bar{V}_{\xi\zeta} + n^2 \beta^2 \bar{V}_{\zeta\zeta} \\ \bar{A} = & \bar{A} - 2i\alpha_{mn} \bar{V}_{\xi\xi} - i n \beta \bar{V}_{\xi\zeta} \\ \bar{B} = & \bar{B} - 2i\alpha_{mn} \bar{V}_{\eta\zeta} - i n \beta \bar{V}_{\eta\zeta} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{V}_m = \bar{V}_{m1}$$

식 (5)를 보면 서로 다른 mode는 각각 독립적이며 상호작용을 가지지 않는 것처럼 보인다. 하지만 F_{mn} 은 모든 비선형 항을 나타내는 $\bar{F}(\phi)$ 으로부터 나오며 ϕ 은 식 (2)에서 주어진 것과 같이 모든 mode 들로부터 결정된다. 따라서 F_{mn} 은 모든 mode들로부터 결정된다고 할 수 있다. 어떠한 ψ_{mn} 에 변화가 생기면 곧 ϕ 의 값을 변화시키게 되고 따라서 F_{mn} 의 값도 변하게 된다.

경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{u}_{mn} = \hat{v}_{mn} = \hat{w}_{mn} = \hat{T}_{mn} = 0 \text{ at } y = 0 \quad (7)$$

$$\hat{u}_{mn} = \frac{\partial \hat{v}_{mn}}{\partial y} = \hat{w}_{mn} = \hat{T}_{mn} = 0 \text{ as } y \rightarrow \infty \quad (8)$$

평균 유동 자체가 mass balance를 스스로 만족하도록 하기 위해서 자유류 경계에서 normal velocity에 대한 경계조건은 Neumann 조건이 사용된다.

각 mode에 대해서 비선형 PSE를 marching하기 위해서는 초기조건이 필요하고 이 초기조건은 선형 안정성 이론으로부터 얻어낸다. 하지만 선형 안정성 이론으로부터 주어지는 초기조건은 평행류 가정을 포함하고 있기 때문에 이를 이용하여 PSE의 marching을 수행하면 비평행 유동에 대한 PSE의 결과로 변화가는 transient 현상이 발생된다. Bertolotti[3]는 higher harmonics 인 경우가 lower harmonics에 비하여 이러한 transient 현상에서 감쇠가 더 천천히 진행됨을 지적한 바 있다. 따라서 PSE를 통해 정확한 결과를 얻기 위해서는 안정성을 해석하고자하는 관심 영역보다 충분히 상류 지점에서 초기 조건을 설정하고 marching을 진행하여 transient가 상류에서 조기에 이루어 질 수 있도록 하는 것이 선호된다.

비선형 PSE는 교란 진폭의 크기도 고려해야 한다. 진폭 정보를 포함하는 초기조건들은 다음과 같이 주어진다.

$$\phi^0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn}^0 \frac{\psi_{mn}^0}{|\hat{u}_{mn}^0|_{\max}} \exp[i(n\beta\zeta - mat)] \quad (9)$$

여기서 $\psi_{mn}^0 = (\hat{p}_{mn}^0, \hat{u}_{mn}^0, \hat{v}_{mn}^0, \hat{w}_{mn}^0, \hat{T}_{mn}^0)$ 의 shape function은 선형 안정성 이론으로부터 얻는다. 초기조건들은 streamwise 속도 교란의 최대값으로 normalize하여 초기의 진폭이 A_{mn}^0 을 통해 정해지도록 한다. Bertolotti[3]는 비선형성이 처음에 평균유동과 단일 주파수 교란만으로 구성되는 상황에서도 주파수의 harmonics를 가지는 교란을 생성할 수 있

음을 보여주었다. 만약 초기의 단일 주파수의 교란의 진폭이 A , 주파수를 F 라 하면, $2F, 3F, \dots$ 와 같은 harmonic 교란들이 A^2, A^3, \dots 의 진폭들을 가지면서 생성된다. 그리고 A^2 의 진폭을 가지고 주파수가 0인 harmonic 또한 생성되게 된다. 따라서 진폭 A_{mn}^0 은 다음과 같이 prime wave의 진폭으로 표현 가능하다.

$$A_{mn}^0 = \begin{cases} (A_{10}^0)^m, & m \geq 1 \\ (A_{10}^0)^2, & m = 0 \end{cases} \quad (10)$$

3. Numerical Methods

비선형 PSE를 차분하는 방법은 참고문헌[7]에서 제시하는 선형 PSE의 방법과 기본적으로 동일하다. 비선형 PSE에서의 차이점은 단지 추가적인 source 항이 있다는 점이다. 이 source항들은 iteration 과정에서 이전 단계의 값들로 구성한다. 유동방향으로의 각 step에서, 모든 mode에 대한 α_{mn} 의 correction이 충분히 작아질 때 까지 iteration을 수행 한다. 전체 iteration과정은 다음과 같이 진행된다.

- (1) streamwise 위치 i 에서 모든 mode에 대해 iteration을 시작하는 $\psi_{mn}^0, \alpha_{mn}^0$ 의 초기값을 이전 step $i-1$ 에서의 값으로 가정한다.
- (2) 가장 최근의 ψ_{mn}, α_{mn} 의 값들을 사용하여 식 (2)로 교란 값들 ϕ_i 를 얻는다.
- (3) ϕ_i 를 사용하여 부록 A에 따라 직교 격자계에서의 비선형 항 F 를 얻는다. 그리고 F 를 변환하여 generalized 격자계에서의 \bar{F} 를 얻는다.
- (4) i 위치에서 식 (3)에 따라 Fourier 계수 F_{mn} 들을 \bar{F} 를 이용하여 얻는다.
- (5) F_{mn} 의 값들을 식 (5)에 적용하고 선형 PSE의 경우에서와 유사한 normalization 조건을 각 mode마다 적용하여 개선된 새로운 값들 $\psi_{mn}^N, \alpha_{mn}^N$ 를 얻는다.
- (6) 만약 모든 mode에 대해 $|\alpha_{mn}^N - \alpha_{mn}^{N-1}| \leq \epsilon$ 의 조건이 만족되면 다음 streamwise step으로 진행하여 다시 (2) 과정부터의 iteration을 반복한다.

선형 PSE의 경우에 비하여 비선형 PSE는 수렴 된 결과를 얻는데 어려움이 따르기 때문에 수렴을 위한 수치적 기법을 요구한다. Streamwise의 파수가 0인 경우에 대해서는 Vigneron[8]의 기법을 사용하여 주파수가 0인 mode에 대한 지배방정식 포물형(Parabolic type)이 되도록 한다. 이 방법은 간

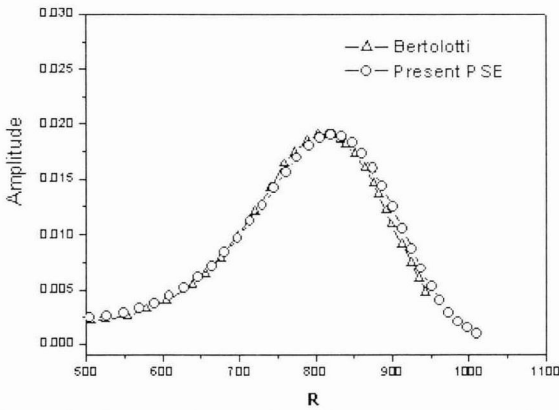


Fig. 3 Amplitude evolution of the TS wave at $F=86$ without nonlinear interaction

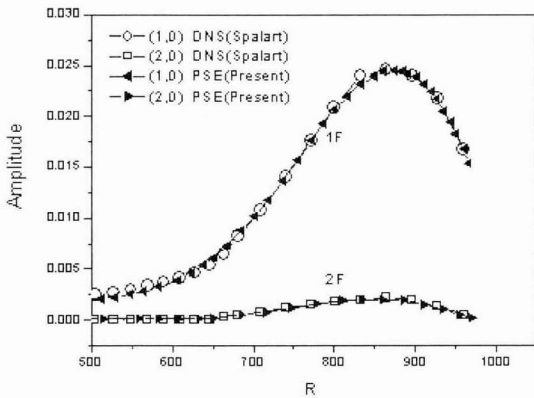


Fig. 4 Amplitude evolution of the TS wave and 1st harmonic wave at $F=86$ with nonlinear interaction

단히 streamwise 압력 교란 구배인 $\partial p/\partial \xi$ 에 다음과 같은 변수 Ω 를 곱함으로써 적용할 수 있다.

$$\Omega = \begin{cases} \frac{\gamma M_x^2}{1 + (\gamma - 1)M_x^2}, & M_x < 1 \\ 1, & M_x \geq 1 \end{cases} \quad (11)$$

다른 mode들에 대해서는 압력 교란 구배에 의한 ellipticity 때문에 발생하는 step의 크기 제한을 Gao[6]가 제시한 relaxation 기법을 사용하여 완화 시킨다.

대부분의 안정성 문제에서는 유한한 개수의 mode만을 고려하여 비선형 문제에 접근해도 충분하다.

따라서 식 (2)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \psi_{mn}(\xi, \eta) \times$$

$$\exp \left[i \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \alpha_{mn}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} + n\beta\zeta - m\omega t \right) \right] \quad (12)$$

여기서 M 과 N 은 안정성 해석에서 고려하는 전체 mode들의 수를 의미한다. 교란 field는 실수영역 이기 때문에 negative mode는 positive mode와 특정 관계를 가져야만 한다. 단순히 2차원 교란만을 고려하는 경우 ($n=0$), shape function과 파수는 다음의 관계를 만족해야 한다.

$$\psi_m = \psi_{-m}^\dagger, \alpha_m = \alpha_{-m}^\dagger \quad (13)$$

이 경우는 식 (13)에 의해서 marching 을 진행하면서 전체 mode 들 중 절반의 mode들만을 계산하게 되며 계산소요 시간을 줄일 수 있게 된다. 3차원 교란에 대해서도 이와 유사한 관계를 얻을 수 있다.

4. 비선형 PSE 결과

개발한 코드의 검증을 위하여 Bertolotti[3], Esfahanian[9], Spalart[10]등에 의해 연구된 바 있는 Blasius flow에 대한 계산을 수행하였다. 본 연구에서 개발된 코드는 압축성 유동에 대한 formulation을 바탕으로 하고 있으나 비압축성 유동에 대한 해석도 매우 작은 마하수의 값을 입력으로 하여 수행 할 수 있다. Bertolotti가 사용한 parameter들을 따라, 우선 2차원 T-S (Tollminen-Schiliting) fundamental wave의 주파수 $1F$ 를 86으로 사용하였다. Fundamental mode 초기 진폭(A_{10}^0)은 $R=500$ 에서 약 0.23%으로 사용하였다. 여기서 레이놀즈수 R 은 경계층 길이 스케일 $\delta = \sqrt{\nu_{\infty}^* x^* / U_{\infty}^*}$ 을 사용한 레이놀즈수 $R = U_{\infty}^* \delta / \nu_{\infty}^*$ 이다. 우선 하나의 fundamental mode만을 고려하여 계산을 하였고 그 결과를 Bertolotti[3]의 선형 PSE의 결과와 비교하였다. 그림 1은 비선형 interaction을 제외한 fundamental mode의 진폭 변화를 보여준다. 그림 1의 결과를 통해 개발된 코드가 비선형 상호작용을 제외한 fundamental mode의 선형 진폭 성장을 잘 해석하고 있음을 확인하였다.

그림 2는 여러 개의 mode들 ($0F, 1F, 2F, 3F$)에 대한 결과를 보여준다. mode의 수를 $M=3$ 까지만 하여 해석을 수행 하였음에도 비선형 PSE의 결과가 DNS의 결과[10]와 잘 일치하고 있다. 그림 1과 그림 2의 검증을 통하여 개발된 코드가 선형 및 비선형 PSE 계산을 만족스럽게 수행함을 확인 하였다.

그림 3은 선형 PSE와 비선형 PSE의 결과를 비교한 것이다. 그림 3을 통해서 mode들 끼리의 비선형 상호작용은 T-S fundamental wave를 더 불안정하게 만든다는 것을 알 수 있다.

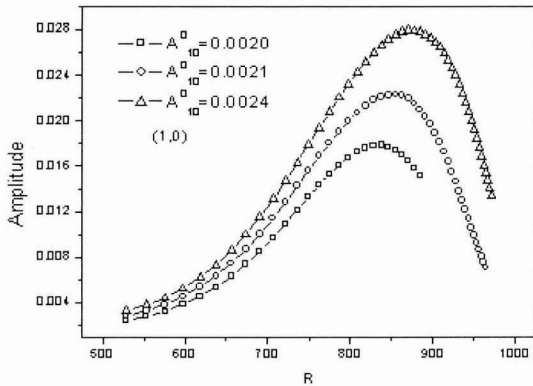


Fig. 6 Comparison of amplitude evolution of T-S wave for different initial amplitude with nonlinear interaction at $F=86$

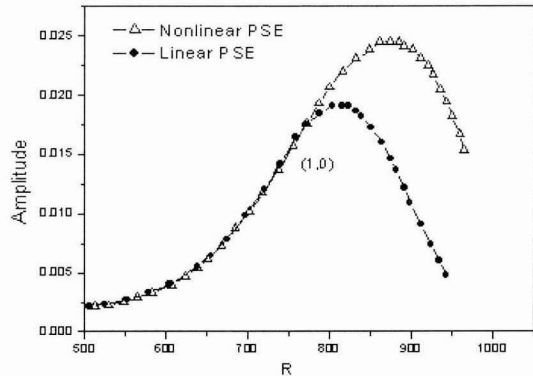


Fig. 7 Comparison of amplitude evolution of T-S wave with and without nonlinear interaction at $F=86$

또한 비선형 PSE의 결과에서는 교란의 진폭 감쇠가 일어나기 시작하는 지점도 선형인 경우에 비하여 더 후류로 이동하게 된다.

안정성 방정식에서 mode들 간의 비선형 상호작용을 고려하는 비선형 PSE의 경우, marching의 결과가 초기 교란 진폭의 크기에 큰 영향을 받는다. 그림 4는 초기 진폭의 크기들의 작은 차이가 비선형 구간에서 큰 차이를 발생시킬 수 있음을 보여 준다

마하수 1.6에서의 초음속 평판 경계층에서, $\beta=0.024$, primary 교란 주파수 $F=50$ 인 경우를 simulation하였다. PSE 계산은 primary wave (2,0)과 두 개의 subharmonic wave (1,1), (1,-1)를 $R=460$ 에서 선형 안정성 이론으로부터 계산해 초기 조건으로 하여 marching을 진행하였다. primary wave의 초기 진폭 크기를 3%, 1.1%, 0.6% 으로 하여 계산을 수행하였다. 세 경우 모두 subharmonic wave들의 초기 진폭은 0.019%로 고정하였다. 여섯 개의 temporal Fourier mode와 세 개의 spanwise mode를 취하고 초기의 크기들은 0으로 설정하

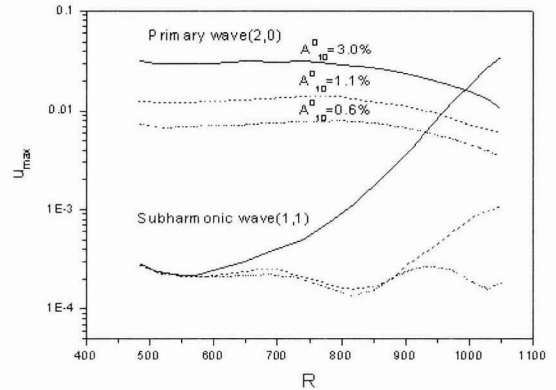


Fig. 8 Amplitude evolution of the primary and subharmonic waves with different initial amplitude at $M=1.6$, $F=50$, $\beta=0.024$

였다. 그림 5로 부터 초기 진폭의 크기가 1.1%보다 큰 경우에서 secondary growth가 일어남을 알 수 있다. 이 경우 secondary growth의 발생은 primary wave가 감쇠하기 시작하는 $R=800$ 에서부터 일어나게 된다.

5. 결 론

본 연구에서는 Curvilinear 격자계에서의 비선형 포물형 안정성 방정식 (Nonlinear Parabolized Stability Equations)을 얻고 유한 차분과 implicit marching procedure를 이용한 높은 정확도의 PSE 코드를 개발하였다. 검증을 위해 Blasius 유동에 대한 해석을 수행하였고 DNS의 결과와 비교하였을 때 만족스러운 결과를 얻음을 확인 하였다. 개발된 코드의 검증에 이어 비선형 상호작용을 고려한 안정성 해석을 수행하였다. 결과를 통해 비선형 상호작용이 T-S fundamental wave를 더 불안정하게 하며 감쇠가 일어나는 위치를 선형인 경우에 비해 더 후류로 이동시킴을 알 수 있다. 비선형 PSE의 결과를 통해 초기 교란 크기의 작은 차이가 비선형 구간에서 큰 차이를 발생시킴을 확인하였다. 마하수 1.6의 압축성 평판 경계층 simulation을 수행하여 1.1%이상의 크기를 가지는 초기 교란은 secondary instability를 일으킴을 확인 하였다.

후 기

본 연구는 방위사업청과 국방과학연구소의 지원으로 수행되었습니다. (계약번호 UD070041AD)

참고문헌

- [1] 1984, Mack, L.M., "Boundary-layer linear stability theory,"

AGARD Report, No. 709.

- [2] 1975, Saric, W.S. and Nayfeh, A.H., "Nonparallel stability of boundary-layer flows," *Phys.Fluids*, Vol.18.
- [3] 1991, Bertolotti, F.P., "Linear and nonlinear stability of boundary layers with streamwise varying properties," *PhD dissertation*, The Ohio State University.
- [4] 2001, Esfahanian, V. and Hejranfar, K., "Linear and Nonlinear PSE for Stability Analysis of the Blasius Boundary Layer Using Compact Scheme," *Journal of Fluids Engineering*, Vol.123.
- [5] 1987, Herbert, Th. and Bertolotti, F.P., "Stability analysis of nonparallel boundary layers," *J.Bull.AM.Phys.Soc.*, Vol.32, p.2079.
- [6] B. Gao. and S.O. Park., "A relaxation technique for parabolized stability equations," *Submit to AIAA journal*.
- [7] 2006, B. Gao. and S.O. Park., "Compressible parabolized stability equation in curvilinear coordinate system and integration," *KSAS International Journal*. Vol.7, No.2.
- [8] 1978, Vigneron, Y.C., Rakich, J.V. and Tannehill, J.C., "Calculation of supersonic viscous flow over delta wings with sharp subsonic leading edges," *AIAA Paper*, No.78-1337.
- [9] 2001, Esfahanian, V. and Hejranfar, K., "Linear and Nonlinear PSE for Stability Analysis of the Blasius Boundary Layer Using Compact Scheme," *Journal of Fluids Engineering*, Vol.123.
- [10] 1987, Spalart, P. and K.S. Yang., "Numerical study on ribbon-induced transition in Blasius flow," *J.Fluid Mech.*, Vol.178.

Appendix

직교좌표계에서의 비선형 source 항에 해당하는 F 를 다음에 나타낸다. 여기서 교란들은 $\phi = (\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T})$ 으로 표현되고 ρ, U, V, W, T 의 기호들은 평균 유동량을 나타낸다. R 은 레이놀즈수, μ 는 점성계수, k 는 열전달 계수, γ 는 비열비,

$$F_1 = - \left[\bar{p} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right]$$

$$F_2 = - \left[\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \bar{p} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right.$$

$$+ V \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial U}{\partial z} \left. \right] + \bar{p} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)$$

$$+ \frac{1}{R} \left[\frac{d\mu}{dT} \bar{p} \left(l_1 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial x} + l_0 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + l_0 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \bar{p} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \right]$$

$$\left(l_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + l_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + l_0 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \frac{d\mu}{dT} \bar{p} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \bar{p} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{d\mu}{dT} \bar{p} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z \partial z} \right) + \left(\frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial z} \bar{p} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \left. \right\}$$

$$F_3 = - \left[\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) + \bar{p} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right.$$

$$+ V \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial V}{\partial z} \left. \right] + \bar{p} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)$$

$$+ \frac{1}{R} \left[\frac{d\mu}{dT} \bar{p} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial x} \right) + \left(\frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \bar{p} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right.$$

$$+ \frac{d\mu}{dT} \bar{p} \left(l_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + l_2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial y} + l_0 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y \partial z} \right) + \left(\frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \bar{p} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) \left(l_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + l_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + l_0 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \frac{d\mu}{dT} \bar{p} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z \partial z} \right) + \left(\frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial z} \bar{p} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \left. \right]$$

$$F_4 = - \left[\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \bar{p} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right.$$

$$+ V \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial W}{\partial z} \left. \right] + \bar{p} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)$$

$$+ \frac{1}{R} \left[\frac{d\mu}{dT} \bar{p} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \bar{p} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right.$$

$$+ \frac{d\mu}{dT} \bar{p} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y \partial y} \right) + \left(\frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \bar{p} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \frac{d\mu}{dT} \bar{p} \left(l_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + l_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + l_2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \left(\frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial z} \bar{p} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \left(l_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + l_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + l_2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \left. \right]$$

$$F_5 = - \left[\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) + \bar{p} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + U \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \right.$$

$$+ \bar{v} \frac{\partial T}{\partial y} + V \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial T}{\partial z} + W \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \left. \right] + \bar{p} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right)$$

$$+ (\gamma - 1) M^2 \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) + \frac{1}{RPr} \left[\frac{dk}{dT} \bar{p} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x \partial x} + \left(\frac{d^2 k}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \bar{p} + \frac{dk}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{dk}{dT} \bar{p} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y \partial y} + \left(\frac{d^2 k}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \bar{p} + \frac{dk}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{dk}{dT} \bar{p} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z \partial z} + \left(\frac{d^2 k}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial z} \bar{p} + \frac{dk}{dT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right]$$

$$+ (\gamma - 1) M^2 \frac{\mu}{R} \left[l_2 \left(2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2 \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + 2 \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + 2I_0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right. \\
& + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\
& + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\
& + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \\
& \left. + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right] \\
& + (\gamma - 1) M^2 \frac{\mu}{R} \left[I_2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right. \\
& + 2I_0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \\
& \left. + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \\
& I_i = i + \lambda/\mu \text{ 이다.}
\end{aligned}$$